الأدهم

فى

الرياضيـــــات

الصف الثالث الإعدادى

الترم الاول

٢٠١٨

اسم الطالب /

المدرســـة /

الفصـــــل /

إعداد أ/ محمد أدهم

ت / ٠١٠٠٠٧٤٥١٩٥٧

أولاً : الجبر و الإحصاء

١ – حاصل الضرب الديكارتى

الزوج المرتب (أ ، ب)

يسمى (أ ، ب) زوج مرتب ويكون

أ ← المسقط الاول   ب ← المسقط الثانى

الفرق بين الزوج المرتب والمجموعة

① {أ ، ب} = {ب ، أ}

② (أ ، ب) ≠ (ب ، أ)

أى أن الترتيب غير مهم فى المجموعة ولكنه مهم داخل الزوج المرتب

③ {أ ، ب} ≠ (أ ، ب)

④ يمكن تكرار عنصر فى الزوج المرتب ولكن لا يمكن التكرار فى المجموعة

(٥ ، ٥) ممكن ولكن {٥ ، ٥} غير ممكن

⑤ يوجد مجموعة خالية ∅ ولكن لا يوجد زوج مرتب خالى.

تساوى زوجين مرتبين

المسقط الاول = المسقط الاول

، المسقط الثانى = المسقط الثانى

أمثلة

① إذا كان (أ ، ب) = (٢ ، ٣)

فإن أ = ٢ ، ب = ٣

② إذا كان (س ، ٥) = (٣ ، ص)

فإن س = ٣ ، ص = ٥

مثال

أوجد قيم س ، ص فى كل مما يأتى.

① (س + ١ ، ٥) = (٣ ، ص − ١)

الحل

س + ١ = ٣	ص − ١ = ٥
س = ٣ − ١	ص = ٥ + ١
∴ س = ٢	∴ ص = ٦

② (س − ٢ ، ٤) = (٥ ، ص + ٣)

الحل

③ (س + ١ ، ص²) = (٥ ، ٩)

الحل

س + ١ = ٥	ص² = ٩
س = ٥ − ١	ص = ±√٩
∴ س = ٤	ص = ± ٣

④ (س + ٣ ، س + ص) = (٥ ، ٧)

الحل

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين

(س × ص) ⇐ (س ضرب ص)

هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصر ∈ س ومسقطها الثانى عنصر ∈ ص

س × ص = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ ص}

مثال

إذا كانت س = {١، ٣}، ص = {٤، ٥، ٧} فأوجد

① س × ص

② ص × س

الحل

① س × ص = {١، ٣} × {٤، ٥، ٧}
= {(١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٧)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٧)}

② ص × س = {٤، ٥، ٧} × {١، ٣}
= {(٤، ١)، (٤، ٣)، (٥، ١)، (٥، ٣)، (٧، ١)، (٧، ٣)}

نلاحظ أن

ص × س ≠ س × ص

أى أن حاصل الضرب الديكارتى غير إبدالى

ملاحظات هامة

① س × ص ≠ ص × س

② (س × س) ⇐ س٢ وتقرأ س إثنين

س٢ = {(أ، ب) : أ، ب ∈ س}

③ س × ∅ = ∅ × س = ∅

④ يرمز لعدد عناصر المجموعة بالرمز ن

⑤ لإيجاد ن(س × ص) نضرب عدد عناصر س × عدد عناصر ص

مثال

إذا كان س = {١، ٢}، ص = {٤، ٥، ٦} فأوجد

① س × ص ومثله بالمخطط السهمى والبيانى

② ص × س

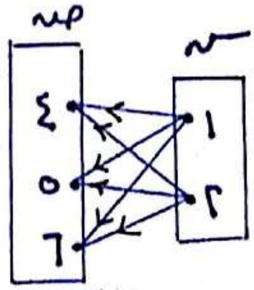
③ س٢ ومثله سهمى - بيانى

④ ن(س × ص)

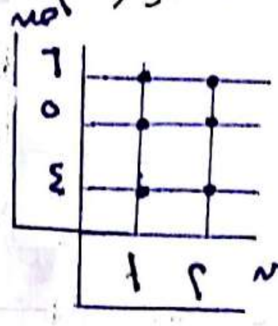
الحل

① س × ص = {١، ٢} × {٤، ٥، ٦}
= {(١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)

المخطط السهمي



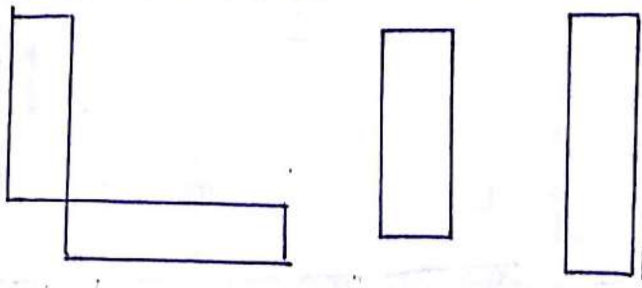
المخطط البياني (الديكارتي)



تدريب أوجد ص × س ومثله بالمخطط السهمي والبياني

ص × س =

المخطط السهمي   المخطط البياني

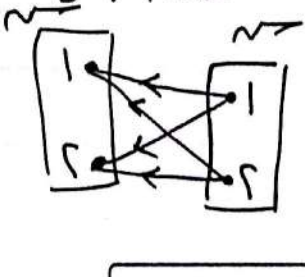


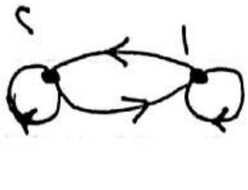
③ س² = س × س

= {١، ٢} × {١، ٢}

= {(١،١)، (١،٢)، (٢،١)، (٢،٢)}

المخطط السهمي   المخطط السهمي





④ ن (س × ص) = ٢ × ٣ = ٦

ن (ص × س) = ٣ × ٢ = ٦

ن (س²) = ٢ × ٢ = ٤

ن (ص²) = ٣ × ٣ = ٩

تمرين يحل في الحصة

إذا كان س = {أ، ب}

، ص = {١، ٣، ٥}

فأوجد

١- س × ص
٢- ص × س
٣- س²

مثلهم بالمخطط السهمي وآخر بياني (ديكارتي)

٤- ص²

٥- ن (س × ص) ، ن (ص × س)

٦- ن (س²) ، ن (ص²)

الحل

فاكر التقاطع والاتحاد بتاع الابتدائى

١) س ∪ ص : س اتحاد ص كل اللى فى س وص من غير تكرار

٢) س ∩ ص : س تقاطع ص
نأخذ المشترك فى س ، ص

٣) س − ص : س فرق ص
نأخذ الموجود فى س ومش موجود فى ص

٤) ص − س : ص فرق س
نأخذ الموجود فى ص ومش موجود فى س

كدة افتكرتهم ؟ أى خدمة

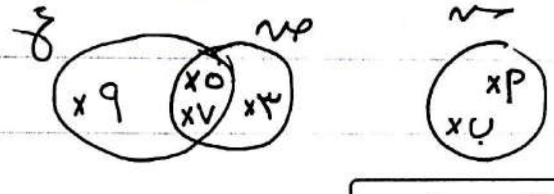
مثال

إذا كانت س = {أ ، ب}
، ص = {٣ ، ٥ ، ٧}
، ع = {٥ ، ٧ ، ٩}
مثل المجموعات بشكل فن ثم اوجد

١) س × ص
٢) ص × ع
٣) س × ع
حلهم انت

٤) س × (ص ∪ ع)
٥) س × (ص ∩ ع)
٦) س × (ع − ص)

الحل



٤) س × (ص ∪ ع)
= {أ ، ب} × {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}
= {(أ ، ٣) ، (أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ،
(أ ، ٩) ، (ب ، ٣) ، (ب ، ٥) ،
(ب ، ٧) ، (ب ، ٩)}

٥) س × (ص ∩ ع)
= {أ ، ب} × {٥ ، ٧}
= {(أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ،
(ب ، ٥) ، (ب ، ٧)}

٦) س × (ع − ص)
= {أ ، ب} × {٩}
= {(أ ، ٩) ، (ب ، ٩)}

تمرين يحل فى الحصة

إذا كانت س = {١}
، ص = {٢ ، ٣} ، ع = {٢ ، ٥ ، ٦}
مثل المجموعات بشكل فن ثم اوجد

١) س × ص
٢) ص × ع
٣) س × ع
٤) ص²
٥) (س × ص) ∪ (ص × ع)
٦) س × (ص ∩ ع)
٧) س × (ص ∪ ع)
٨) (ع − ص) × (س ∩ ص)

ملاحظة هامة

إذا كان (أ ، ب) ∈ س × ص

فإن أ ∈ س ، ب ∈ ص

فمثلاً

* إذا كان (٢ ، ٣) ∈ س × ص فإن ٢ ∈ س ، ٣ ∈ ص
* إذا كان (٥ ، -٤) ∈ ص × س فإن ٥ ∈ ص ، -٤ ∈ س
* إذا كان (٤ ، ٢) ∈ {٣ ، ٤} × {٥ ، س} فإن س = ٢

مثال

إذا كان س × ص = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥)} فأوجد

① س ، ص

② ص × س

③ $ص^٢$

الحل

① من حاصل الضرب نجد أن كل مسقط أول ∈ س وكل مسقط ثاني ∈ ص

∴ س = {١}

ص = {١ ، ٣ ، ٥}

② ص × س

③ $ص^٢$

الواجب

[١] أوجد قيمة س ، ص في كل مما يأتي

① (س ، ص) = (-٣ ، ٤)

② (س ، ص) = ($\sqrt{٢٥}$ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

③ (-٢ ، س) = (ص ، ٥)

④ (س - ٣ ، ص + ١) = (٣ ، ٤)

⑤ ($٢س^٢ - ١$ ، $ص^٣ - ٥$) = (٧ ، ٥٩)

⑥ (٣ ، ص) = (٥س - ٢ ، ٤س)

[٢] إذا كان س = {١ ، ٣} ، ص = {٤ ، ٥} فأوجد

① س × ص ② ص × س

③ $س^٢$ ④ $ص^٢$

ومثلهم بالمخطط السهمي والبياني

[٣] إذا كان س × ص = {(٥ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣) ، (٢ ، ١)}

فأوجد

① س ، ص ② ص × س

③ ن(س × ص) ، ن($س^٢$) ، ن($ص^٢$)

④ $س^٢$ ومثلها بالمخطط السهمي والبياني

[٤] إذا كان س = {١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٣} ، ع = {٥ ، ٦} فأوجد

① س × (ص ∪ ع)

② ع × (س ∩ ص)

③ س × (ص - ع)

⑤ إذا كان س = {١، ٢، ٣، ٤} ، ص = {٣، ٤، ٥}
فأوجد
① (س ∩ ص) × ص
② (س − ص) × ص
③ (ص − س) × س

⑥ أكمل العبارات الآتية
① إذا كان س = {٣، ١} ، ص = {٤} فإن ص × س = ...
② {٥} × {٣}
③ إذا كان س = {١، ٢، ٥} فإن ن(س²) = ...
④ إذا كانت (٢، ٥) ∈ س × ص فإن (٥، ٥) ∈ .... ، (٢، ٢) ∈ .... ، (٥، ٢) ∈ ....
⑤ إذا كان س = {٢، ٣} فإن س × φ = ...
⑥ إذا كان س × ص = {(٢، ٦) ، (٢، ٩) ، (٣، ٦) ، (٣، ٩) ، (٥، ٦) ، (٥، ٩)} فإن س = ... ، ص = ...
⑦ إذا كان س² = {(٣، ٣) ، (٣، ٥) ، (٥، ٣) ، (٥، ٥)} فإن س = ...

⑧ إذا كان س × ص = {(١، ٧) ، (١، ٥)} فإن {٥، ٧} ∈ .... ، (٥، ٧) ∈ ....
⑨ إذا كان ن(س) = ٣ ، ص = {١، ٢} فإن ن(س × ص) = ...
⑩ إذا كان ن(س) = ٤ ، ن(س × ص) = ١٢ فإن ن(ص) = ...
⑪ إذا كان ن(س × ص) = ١٥ ، ن(ص) = ٥ فإن ن(س) = ...
⑫ إذا كان ن(س²) = ٩ ، ن(ص) = ٤ فإن ن(س × ص) = ...
⑬ ن(س²) = ٤ ، ن(ص²) = ٩ فإن ن(س × ص) = ...
⑭ إذا كان ن(س²) = ٩ ، ن(س × ص) = ١٥ فإن ن(ص²) = ...
⑮ إذا كان (س − ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣) فإن $\sqrt{س + ٢ص}$ = ...
⑯ إذا كان (س² − ٥ ، $\frac{ص}{٢}$) = (١١ ، ٢) فإن س = ... ، ص = ...
⑰ إذا كان ($\frac{س}{ص}$ ، ص + ٢) = (−١ ، ٥) فإن $ص^{س}$ = ...

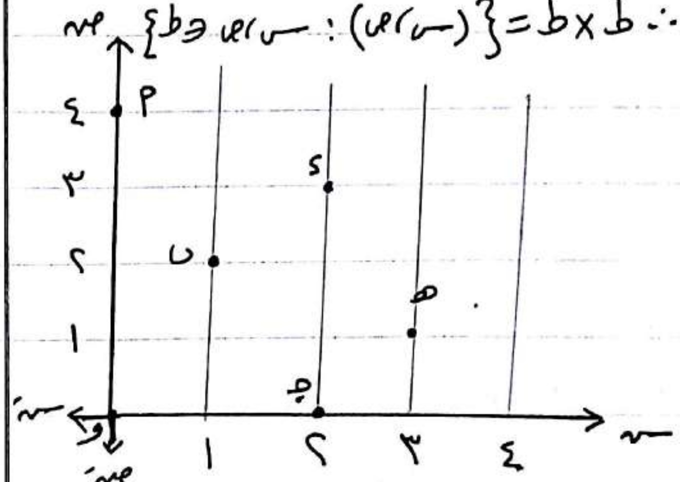
انتهت كفاية كده

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين غير منتهيتين

أولاً الحاصل الديكارتى ط × ط (ط²)

تذكر أن ط = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ...}

∴ ط × ط = {(س، ص) : س، ص ∈ ط}



أ (٠، ٤) ب (١، ٢)

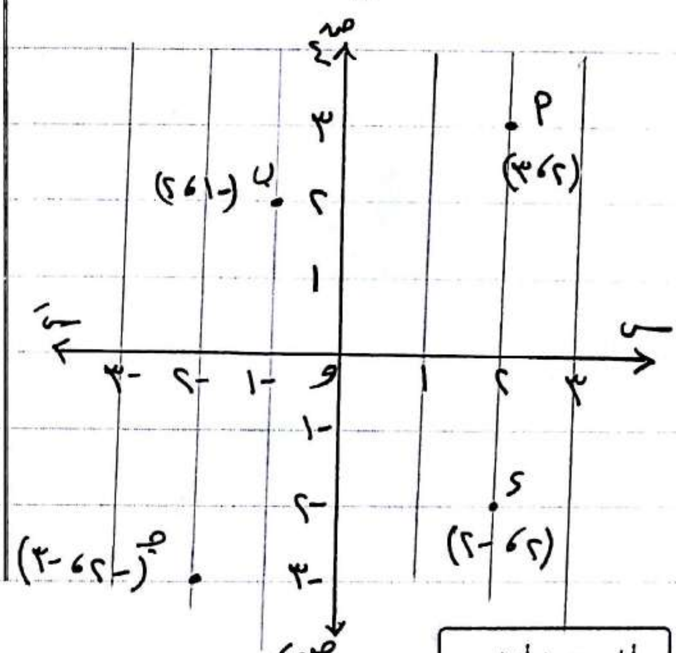
جـ (٢، ٠) د (٢، ٣)

هـ (٣، ١)

ثانياً الحاصل الديكارتى ص × ص (ص²)

تذكر أن ص = {...، ٣، ٢، ١، ٠، -١، -٢، -٣، ...}

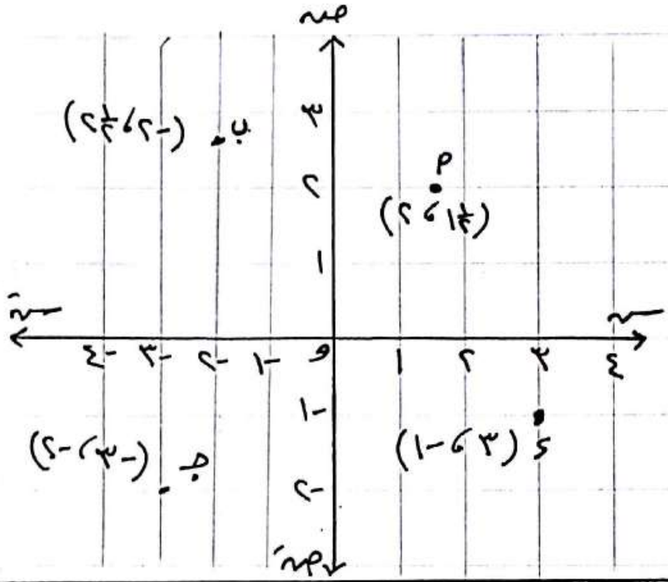
∴ ص × ص = {(س، ص) : س، ص ∈ ص}



ثالثاً الحاصل الديكارتى ن × ن (ن²)

تذكر أن ن = {أ/ب : أ، ب ∈ ص، ب ≠ ٠}

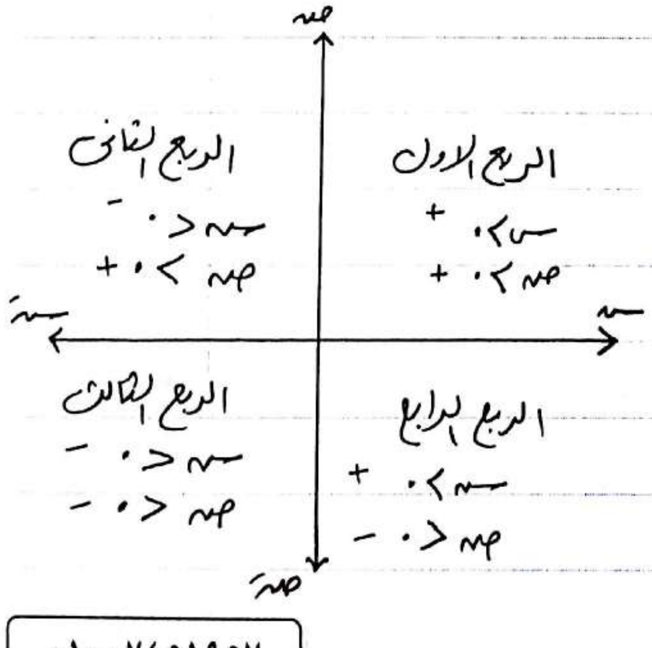
∴ ن × ن = {(س، ص) : س، ص ∈ ن}



رابعاً الحاصل الديكارتى ح × ح = (ح²)

تذكر أن ح = ن ∪ ن′

∴ ح × ح = {(س، ص) : س، ص ∈ ح}



شوية ملاحظات عنب

① يسمى المستقيم $\overleftrightarrow{سس'}$ محور السينات أو المحور الأفقي

ويسمى $\overrightarrow{وس}$ الاتجاه الموجب لمحور السينات

كما $\overrightarrow{وس'}$ الاتجاه السالب لمحور السينات

② يسمى المستقيم $\overleftrightarrow{صص'}$ محور الصادات أو المحور الرأسي

$\overrightarrow{وص}$ الاتجاه الموجب لمحور الصادات

$\overrightarrow{وص'}$ الاتجاه السالب لمحور الصادات

③ المستقيمان $\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{صص'}$ متعامدان لذلك تسمى الشبكة البيانية المتعامدة

④ نقطة تقاطع المحورين تسمى بنقطة الأصل "و"

⑤ لأى زوج مرتب (س ، ص) فإن س هو المسقط الأول "السيني" ص هو المسقط الثاني "الصادي"

⑥ **المستقيمان** $\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{صص'}$ يقسمان المستوى إلى أربع أرباع

الربع الأول س > ٠ ، ص > ٠ (+ ، +)

الربع الثاني س < ٠ ، ص > ٠ (− ، +)

الربع الثالث س < ٠ ، ص < ٠ (− ، −)

الربع الرابع س > ٠ ، ص < ٠ (+ ، −)

⑦ إذا كان الإحداثي السيني للنقطة يساوي صفر فإن النقطة تقع على محور **الصادات** (٠ ، ص)

⑧ إذا كان الإحداثي الصادي للنقطة = صفر فإن النقطة تقع على محور **السينات** (س ، ٠)

مثال

اذكر الربع أو المحور الذي تقع عليه النقاط التالية.

① أ (−١ ، ٣) ← الربع الثاني

ب (٣ ، ٥) ← الربع الأول

جـ (٣ ، −٢) ← الربع الرابع

د (٠ ، ٤) ← محور الصادات

هـ (−٣ ، −٩) ← الربع الثالث

ل (−٥ ، ٠) ← محور السينات

م (٠ ، −٣) ← محور الصادات

ن (−٧ ، ٠) ← محور السينات

تدريب

أ (١ ، −٢) ←

ب (−٣ ، ٥) ←

جـ (٠ ، ٤) ←

د (٢ ، ٣) ←

هـ (−١ ، −٤) ←

ل (٥ ، ٠) ←

مثال ①

إذا كانت س = [١ ، ٣]

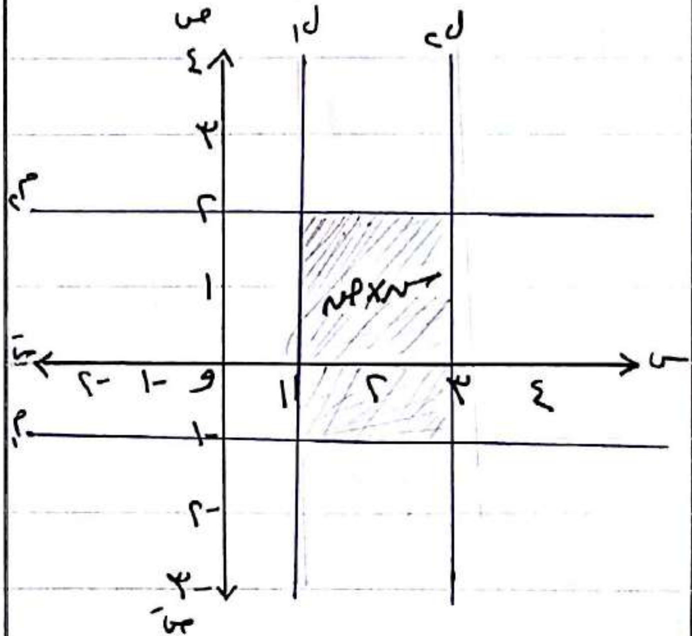
، ص = [-١ ، ٢] مثل بيانياً

المنطقة التي تمثل س × ص

ثم بين أي النقط الآتية ∈ س × ص

(-١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٢)

الحل



(-١ ، ١) ∉ س × ص

(٢ ، ١) ∈ س × ص

(٣ ، ٢) ∈ س × ص

كدة عرضت الحل إزاى ؟
بتاخد المجموعة الاولى وتمثلها على محور السينات وتوصلها رأسى
وتاخد المجموعة الثانية وتمثلها على محور الصادات وتوصلها افقى
وبعدين تشوف منطقة التقاطع

مثال ②

إذا كانت س = [٠ ، ٢]

، ص = [-١ ، ١] مثل بيانياً

المنطقة التي تمثل ① س × ص

② ص × س

③ س²

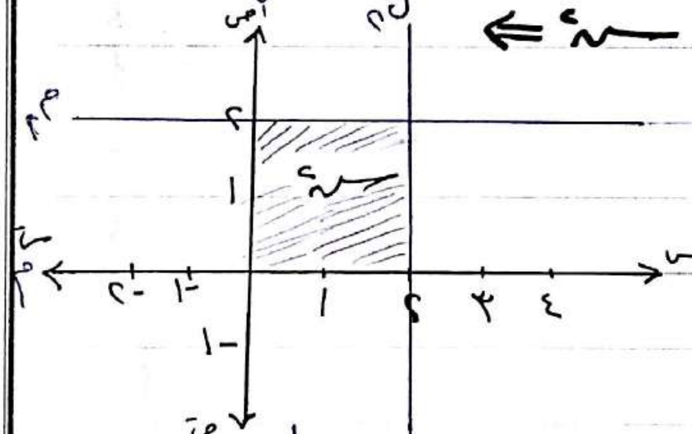
④ ص²

الحل

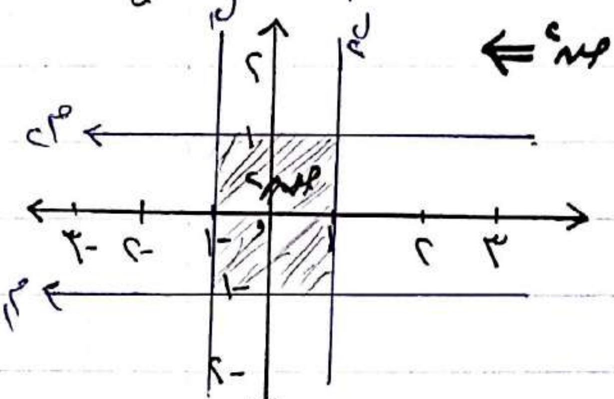
أولاً س × ص حل انت

، ص × س

س² ⇐



ص² ⇐



الواجب

١ على شبكة بيانية متعامدة للحاصل الديكارتي (ع × ع) عين النقاط الاتية وحدد الربع أو المحور الذي تقع عليه

أ (٢، ١)
ب (٥، -١)
جـ (٠، ٣)
د (-١، -٢)
هـ (٤، ٠)
م (-٣، ٢)
ل (٦، ٠)
ن (٤، -٢)

٢ على شبكة بيانية متعامدة عين
أ (-٢، ٣)   ب (٢، ٣)
هـ (٢، ٦)
ثم أوجد مساحة المثلث أ ب هـ وعين طول $\overline{\text{أهـ}}$.

٣ إذا كان س = [٢، ٤] ، ص = [-١، ٣] أوجد المنطقة التي تمثل
١ س × ص
٢ ص × س
٣ س^٢   ٤ ص^٢

٤ إذا كانت س = [-٢، ٣] أوجد المنطقة التي تمثل س × س ثم بين أي من النقاط الاتية ∈ س × س
أ (١، ٢)   ب (٣، -١)
هـ (-١، ٤)   د (-٢، ٠)

٥ أكمل العبارات الاتية:
١ النقطة (-٢، ٣) تقع في الربع ----
٢ إذا كانت (٥، ب-٧) على محور السينات فإن ب = ----
٣ إذا كانت (س+٢، ٩) تقع على محور الصادات فإن س = ----
٤ النقطة (٧، -٣) تقع في الربع ----
٥ " (٣، ٠) تقع على محور ----
٦ " (٠، -٤) تقع على محور ----
٧ إذا كانت (أ، ب) تقع في الربع الأول فإن أ ب ---- صفر
٨ إذا كانت (أ، ب) تقع في الربع الثالث فإن أ ب ---- صفر
٩ إذا كانت (أ، ب) تقع في الربع الثاني فإن أ ب ---- صفر
١٠ إذا كانت النقطة (أ، ب) تقع على محور الصادات فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ----

٢ ــ العلاقــات

أولاً العلاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى :

العلاقة من س إلى ص هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص $\boxed{ع \subset س \times ص}$

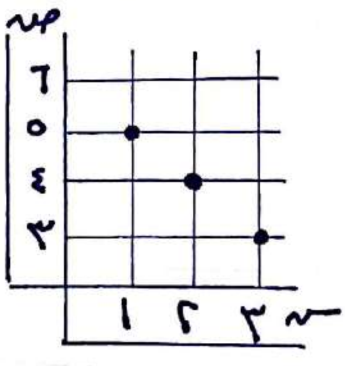
مثال ①

إذا كانت س = {١، ٢، ٣}
، ص = {٣، ٤، ٥، ٦}
وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث "أ ع ب" تعني أ + ب = ٦
اكتب بيان ع ومثله سهمياً وبيانياً

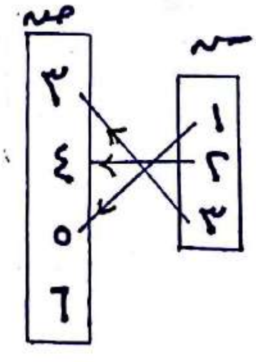
الحل

بيان ع = {(١، ٥)، (٢، ٤)، (٣، ٣)}

المخطط البياني



المخطط السهمي

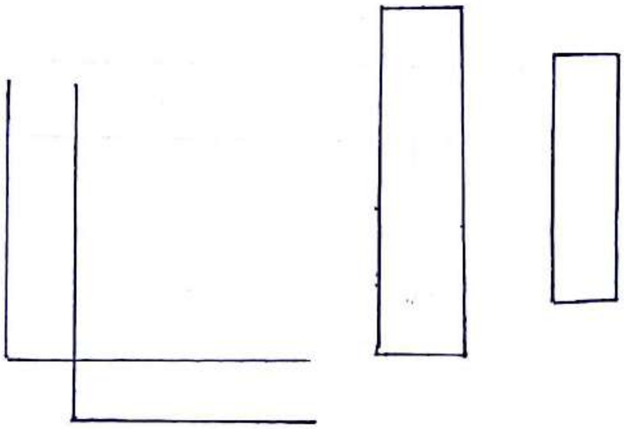


مثال ②

إذا كانت س = {١، ٣، ٤، ٥}
، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}
وكانت "أ ع ب" تعني (أ + ب = ٧)
اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمي والبياني

الحل

بيان ع =



مثال ③

إذا كانت س = {١، ٤، ٥}
، ص = {٢، ٣} بين أي من المجموعات الآتية تمثل علاقة من س إلى ص

س × ص = {(١، ٢)، (١، ٣)، (٤، ٢)،
(٤، ٣)، (٥، ٢)، (٥، ٣)}

① ع$_1$ = {(٤، ٢)، (١، ٢)، (٥، ٣)}
ع$_1$ ⊂ س × ص فهي تمثل علاقة

② ع$_2$ = {(١، ٢)، (٣، ١)، (٤، ٣)}
⊄ س × ص فهي ليست علاقة

③ ع$_3$ = {(٤، ٢)، (٤، ٣)، (١، ٣)}
⊂ س × ص فهي علاقة

④ ع$_4$ = {(١، ٣)، (٢، ٦)} ⊄ س × ص
∴ ع$_4$ ليست علاقة من س إلى ص

ثانياً: العلاقة من مجموعة إلى نفسها (العلاقة على مجموعة)

إذا كانت ع علاقة من س إلى س فإننا نقول أن ع علاقة على س ويكون $\boxed{\text{ع} \subset \text{س}^2}$

مثال ١

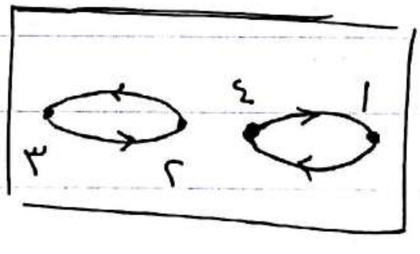
إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٤}
وكانت ع علاقة على س حيث
"أ ع ب" تعني أ + ب = ٥ ∀ أ، ب ∈ س

١) اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمي
٢) إذا كان (ل، ٢) ∈ ع فأوجد قيمة ل
٣) إذا كانت ٤ ع ك فأوجد قيمة ك

الحل

بيان ع = {(١، ٤)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٤، ١)}

المخطط السهمي س



٢) ∵ (ل، ٢) ∈ ع ، (٣، ٢) ∈ ع
∴ ل = ٣

٣) ∵ ٤ ع ك ، ٤ ع ١
فإن ك = ١

شوية ملاحظات تحل بيهم مسائل العلاقات

ذاكرهم كويس

١) أ معكوس ضربي لـ ب
معناه انه المقلوب بتاعه يعني
٣ ← ١/٣   ٥/٢ ← ٢/٥   ١ ← ١   -١ ← -١
وخلي بالك الصفر ليس له معكوس ضربي

٢) أ معكوس جمعي لـ ب
معناه تغيير الاشارة
-٥ ← ٥   ٤ ← -٤
٠ ← ٠ خلي بالك

٣) "أ" مضاعف من مضاعفات "ب"
معناها أ يقبل القسمة على ب بدون باقي
وانتبه الصفر هو مضاعف لكل الاعداد
لأن الصفر يقبل القسمة على كل الاعداد ≠ ٠

٤) "أ تقسم ب" معناها الثاني يقبل القسمة على الاول بدون باقي عكس اللي فوق

٥) تذكر الاعداد الاولية هي التي تقبل القسمة على نفسها او الواحد الصحيح فقط
أ = {٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٩، ...}

الواجب

مثال ١ فى كل مما يلى اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمى وآخر بيانى حيث أ ع ب ، أ ∈ س ، ب ∈ ص

١) س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} "أ ع ب" تعنى أ + ب = ٧

٢) س = {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩} "أ ع ب" تعنى أ ≥ ب

٣) س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$} "أ ع ب" تعنى «أ معكوس ضربى لـ ب»

٤) س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦} "أ ع ب" تعنى «أ + ب = عدد أولى»

٥) س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ ، ١٥} "أ ع ب" تعنى أ تقسم ب

٦) س = {٢ ، ١ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$} أ ع ب تعنى «أ معكوس ضربى لـ ب» حيث أ ، ب ∈ س

حظ: تذكر الصفر ليس له معكوس ضربى

٧) س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦} "أ ع ب" تعنى «أ مضاعف لـ ب»

٨) س = {-١ ، ٠ ، ١} "أ ع ب" تعنى أ = $ب^٢$ حيث أ ، ب ∈ س

مثال ٢ إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٢ ، ٤} بين أى من المجموعات الآتية تكون علاقة من س إلى ص

١) $ع_١$ = {(٤ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤)}

٢) $ع_٢$ = {(٤ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١)}

٣) $ع_٣$ = {(٢ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ١)}

٤) $ع_٤$ = {(٢ ، ٤) ، (٤ ، ٤)}

أكمل

استراحة بسيطة

١- كم مرة وقف رمضان صبحى على الكرة ---

٢- كم عدد المرات التى حصل فيها نادى الزمالك على بطولة الدورى العام ---

٣- ماذا كانت نتيجة ماتش ٦ : ١ ---
أى هدفه ذاكروا بقه

٣ ـ الدالة (التطبيق)

تعلمنا فى الدرس السابق مفهوم العلاقة وانتوا طبعاً احسن ناس بتحل علاقات صح ؟

** السؤال المهم متى تكون العلاقة دالة ؟

(١) كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط من احد الازواج المرتبة التى تنتمى إلى بيان ع

(٢) كل عنصر من س يخرج منه سهم واحد فقط من المخطط السهمى

(٣) كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط من المخطط البيانى للعلاقة ع

مثال (١)

إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {٣، ٤، ٥} نبين أى من العلاقات الاتيه تمثل دالة

① ع١ = {(١، ٥) ، (٢، ٤) ، (٣، ٦)}

العلاقة تمثل دالة لأن كل عنصر من س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط

② ع٢ = {(١، ٦) ، (٢، ٥) ، (٣، ٣) ، (٣، ٢)}

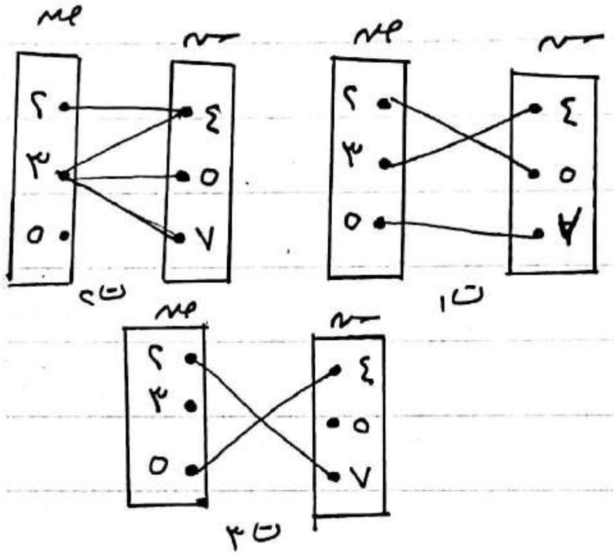
ليست دالة لأن العنصر "٣" ظهر كمسقط أول مرتين

③ ع٣ = {(٢، ٦) ، (٣، ٥)}

ليست دالة لأن العنصر "١" لم يظهر كمسقط أول من احد الازواج المرتبة.

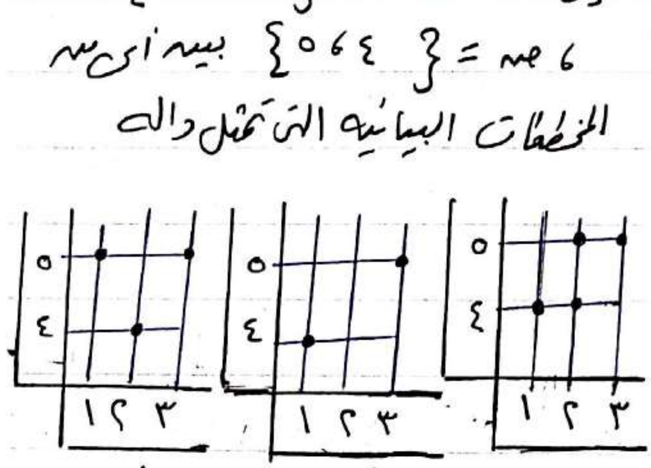
تدريب

إذا كانت س = {٤، ٥، ٧} ، ص = {٢، ٣، ٥} بين أى من المخططات السهمية الاتية تمثل دالة



تدريب ثانى

إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {٤، ٥} بين أى من المخططات البيانية التى تمثل دالة



إذا كانت العلاقة من س إلى ص دالة فإنه

١) المجموعة س تسمى المجال
٢) المجموعة ص تسمى المجال المقابل
٣) العناصر التي تم اختيارها من ص تسمى المدى

∴ المدى هو مجموعة صور عناصر مجموعة المجال وهو جزئية من المجال المقابل

مثال (١)

إذا كانت س = {٢، ٣، ٤}
، ص = {٤، ٥، ٦، ٧}
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني
أ + ب = ٨

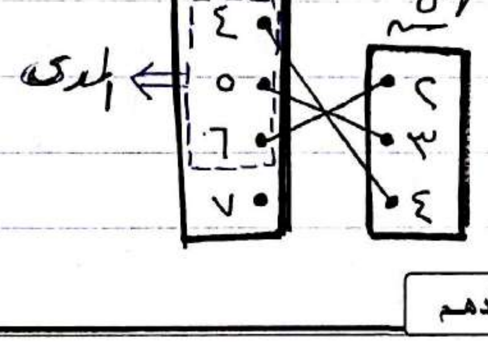
المطلوب

١- اكتب بيان ع ومثله
٢- هل العلاقة دالة أم ليست دالة
٣- إذا كانت دالة فأوجد المجال والمجال المقابل والمدى

الحل

بيان ع = {(٢، ٦)، (٣، ٥)، (٤، ٤)}

المخطط السهمي



العلاقة دالة لأنه كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط في المخطط السهمي للعلاقة.

المجال = س = {٢، ٣، ٤}
المجال المقابل = ص = {٤، ٥، ٦، ٧}
المدى = {٤، ٥، ٦}

ملاحظة هامة

إذا كانت العلاقة ليست دالة فإنه ليس لها مجال أو مجال مقابل أو مدى

تدريب

إذا كانت س = {٢، ١، ٠، $\frac{1}{2}$}
وكانت ع علاقة على س حيث "أ ع ب" تعني (أ معكوس ضربي ب)
حيث أ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمي

الحل

خليك فاكر
المعكوس الضربي لـ(١) هو (١)
والصفر ليس له معكوس ضربي لأنه القسمة على الصفر غير ممكنة

الواجب

١ فى كل مما يلى اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمى وآخر بيانى وحدد إذا كانت العلاقة دالة ام لا وإذا كانت داله فاوجد المجال والمجال المقابل والمدى

① س = {٢، ٣، ٤}
ص = {٦، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧، ٨}
"أ ع ب" تعنى (أ = $\frac{1}{2}$ ب)

② س = {١، ٢، ٣}، ص = {١، ٣، ٦، ٩، ١٢}
"أ ع ب" تعنى ((أ = $\frac{1}{3}$ ب))

③ س = {٤، ٦، ٨، ١٠}
ص = {٢، ٣، ٤، ٥}
"أ ع ب" تعنى ((أ = ٢ب))

④ س = {٢، ٤، ٥، ٧}
ص = {٤، ٥، ٦، ٧، ٩}
"أ ع ب" تعنى ((أ ≥ ب))

⑤ س = {٠، ١، ٢، ٣}
ص = {٠، ١، ٨، ٤، ٩}
أ ع ب تعنى ((أ^2 = ب))

⑥ س = {١، ٢، ٤}
((أ ع ب)) تعنى ((أ ضعف ب))

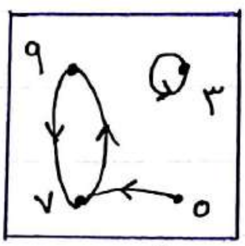
⑦ س = {٢، ٣، ٤}، ص = {٦، ٨، ١٠، ١١، ١٥}
"أ ع ب" تعنى ((أ تقسم ب))

---

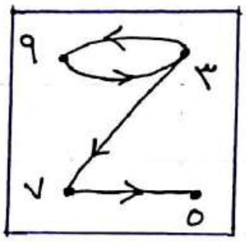
٢ إذا كانت س = {١، ٣، ٥}، ع داله على س، بيانها ع = {(أ، ٣)، (ب، ١)، (١، ٥)}
فاوجد القيمه العدديه أ + ب

---

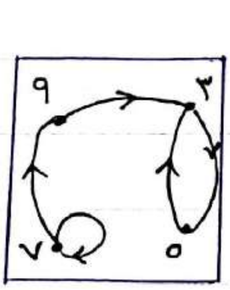
٣ إذا كانت س = {٣، ٥، ٧، ٩} فبين أى من المخططات الآتيه يمثل داله



ب



جـ



د

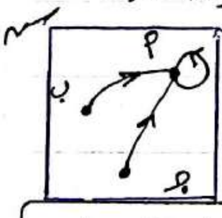
---

٤ أكمل

١- إذا كانت د تمثل داله من س إلى ص فإن س تسمى ...، ص تسمى ...، مجموعة صور المجال (س) يسمى ...

٢- إذا كانت ع داله بيانها ع = {(١، ٢)، (٢، ٥)، (٤، ٧)} فإن مداها = ...

٣- مدى الداله من الشكل هو ...



٤ - دوال كثيرات الحدود

التعبير الرمزي عن الدالة:

(١) يرمز للدالة عادة بأحد الرموز
(د أو ن أو هـ أو ....)

(٢) فإذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإننا نكتب
د : س ← ص
أو د(س) = ص
حيث س ∈ س ، ص ∈ ص

(٣) إذا كانت د دالة من س إلى س
فإن د : س ← س
ونقول د دالة على س

الدالة كثيرة الحدود

الدالة كثيرة الحدود هي دالة قاعدتها (صورة س) هي حد أو مقدار جبري
ولابد أن يتوفر الشرطان

(١) كل من المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح

(٢) قوة (أس) المتغير س في أي حد من حدود قاعدتها هو عدد طبيعي

ملاحظة هامة قوي

يجب التعرف على ما إذا كانت الدالة كثيرة حدود أم لا قبل وضع قاعدتها في أبسط صورة

مثال (١)

بين أي من الدوال الآتية كثيرة حدود

(١)
الدالة د : د(س) = ٣
الدالة د : د(س) = ٢س + ٥
الدالة ر : ر(س) = س^{٢} + س − ٥
الدالة س : س(س) = ٢س^{٢} − $\frac{1}{2}$ س

(٢)
الدالة ن : ن(س) = س^{٢} + $\sqrt{س}$ − ٣
الدالة هـ : هـ(س) = س^{٣} + $\frac{1}{س}$
الدالة م : م(س) = س(س + $\frac{٣}{س}$)

لاحظ جيداً

الدالة د : د(س) = س($\frac{1}{س}$) ليست كثيرة حدود
، س(س + $\frac{٣}{س}$) ليست كثيرة حدود على الرغم أنه عند الاختصار تكون (س^{٢} + ٣) ⇐ ولكنها تكون صورة أخرى لدالة أخرى

درجة الدالة

هي أكبر قوة للمتغير في قاعدة الدالة

أمثلة

(١) د$_{1}$(س) = ٣س − ٢ من الدرجة الأولى (خطية)

(٢) د$_{2}$(س) = س^{٢} − ٥س من الدرجة الثانية (تربيعية)

(٣) د$_{3}$(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} + ٧س من الدرجة الثالثة (تكعيبية)

(٤) د$_{4}$(س) = ٧ ثابتة (صفرية)

ملاحظة هامة على درجة الدالة الثابتة

* د(س) = أ حيث أ ∈ ح - {٠}
كثيرة حدود من الدرجة صفر (دالة ثابتة)

* وفي حالة أ = ٠ أى عندما
د(س) = ٠ فإن الدالة ليس لها درجة

عند بحث درجة الدالة يجب تبسيط قاعدتها إلى أبسط صورة قبل تعيين درجتها

مثال (١)

اذكر درجة كل من الدوال الآتية

١ د(س) = ٥ - ٣س

من الدرجة الأولى (دالة خطية)

٢ د(س) = ٣س - س^{٢}

من الدرجة الثانية (دالة تربيعية)

٣ د(س) = ٥س - ٣س^{٢} + س^{٣}

من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية)

٤ د(س) = س^{٢}(٢ + س)^{٢}

س^{٢} × س^{٢} = س^{٤} أعلى أس من الدرجة الرابعة

٥ د(س) = س(س^{٣} + س^{٢})

- س^{٢}(س^{٢} - ٢س)

= $\cancel{\text{س}^{٤}}$ + س^{٣} - $\cancel{\text{س}^{٤}}$ + ٢س^{٣}

= س^{٣} + ٢س^{٣} = ٣س^{٣}

من الدرجة الثالثة

(دالة تكعيبية)

مثال (٢)

إذا كانت د: د(س) = س^{٢} - ٢س + ٥

(١) أوجد د(١) ، د(٠) ، د(-٢)

د($\frac{١}{٢}$) ، د($\sqrt{٥}$)

الحل

د(١) = (١)^{٢} - ٢(١) + ٥ = ١ - ٢ + ٥

= ٤

د(٠) = (٠)^{٢} - ٢(٠) + ٥ = ٥

د(-٢) = (-٢)^{٢} - ٢(-٢) + ٥ = ١٣

د($\frac{١}{٢}$) =

د($\sqrt{٥}$) =

د(-١) =

مثال (٣)

إذا كانت د(س) = س^{٢} - ٣س

، ر(س) = س - ٣

فأوجد (١) د(٢) - ر(٥)

(٢) اثبت أن د(٣) = ر(٣) = صفر

الحل

(١) د(٢) = ٢^{٢} - ٢×٣ = ٤ - ٦ = -٢

ر(٥) = ٥ - ٣ = ٢

∴ د(٢) - ر(٥) = -٢ - ٢ = -٤

(٢) د(٣) = ٣^{٢} - ٣×٣ = ٩ - ٩ = صفر

ر(٣) = ٣ - ٣ = صفر

ذاكر // افهم // ركز

وادفع فلوس الدرس تبقى ممتاز

إزاى تجيب قاعدة الدالة من بيانها مع "ركز معايا"

مثال (١)

إذا كان بيان الدالة

د = {(٠، ٤) ، (١، ٣) ، (٢، ٢) ، (٣، ١)}

اكتب المجال = {٠، ١، ٢، ٣}

المدى = {٤، ٣، ٢، ١}

حدد قاعدة الدالة

نلاحظ أن مجموع س ، ص (د(س)) = ٤

∴ س + د(س) = ٤

$\boxed{د(س) = ٤ - س}$ قاعدة الدالة

مثال (٢)

إذا كان بيان الدالة د = {(١، ٣) ، (٢، ٥) ، (٣، ٧) ، (٤، ٩) ، (٥، ١١)}

فأوجد المجال =

المدى =

قاعدة الدالة ←

ص = ٢ س + ١

∴ قاعدة الدالة د(س) = ٢ س + ١

الواجب

١ أى من الدوال الآتية تمثل كثيرة حدود (عين درجتها إذا كانت كثيرة حدود)

① د: د(س) = ٢ س − ٥

② د: د(س) = ٣

③ د: د(س) = س + $\frac{1}{س}$

④ د: د(س) = $س^{٣}$ + $س^{٢}$ + ٣

⑤ د: د(س) = $س^{٢}$ + $\sqrt{س}$ + ٨

⑥ د: د(س) = س ($س^{٢}$ + $س^{٣}$ − ٤)

⑦ د: د(س) = س ($س^{٢}$ + ٧)

٢ إذا كانت د: د(س) = $س^{٢}$ − ٣

فأوجد د(١) ، د(−١) ، د(٠) ، د(٢)

٣ إذا كانت د دالة على س حيث س = {٣، ٤، ٥، ٦} وكان

د(٣) = ٣ ، د(٤) = ٥

د(٥) = ٥ ، د(٦) = ٥

① مثل د بمخطط سهمي

② اكتب بيان د واذكر مداها

٤ إذا كانت د: د(س) = س − ٤

فأوجد د(٧) = --- ومجال د = ---

٥ إذا كانت د(س) = $س^{٢}$ − س + ٣

فأوجد د(−٣) = ---

٦ د(س) = ٥ $س^{٢}$ + ٧ من الدرجة ----

٧ مجموعة صور عناصر مجال الدالة تسمى ----

٨ د(س) = $س^{٢}$ − $\sqrt{٢}$ س فأوجد

د($\sqrt{٢}$) = ---

٩ د(س) = ك س + ٨ ، د(٢) = صفر

فأوجد ك =

دراسة بعض دوال كثيرات الحدود

أولاً الداله الخطيه

الداله الخطيه هي داله الدرجه الاولى التي يكون اس المتغير فيها = ١

مثل د(س) = س - ١

د(س) = ٥س + ٢

د(س) = ٧س + ١٢

وتمثل بخط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطه (٠ ، ب)

ومحور السينات ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)

حيث د(س) = أس + ب

مثال(١)

مثل بيانياً د(س) = ٢س - ٣

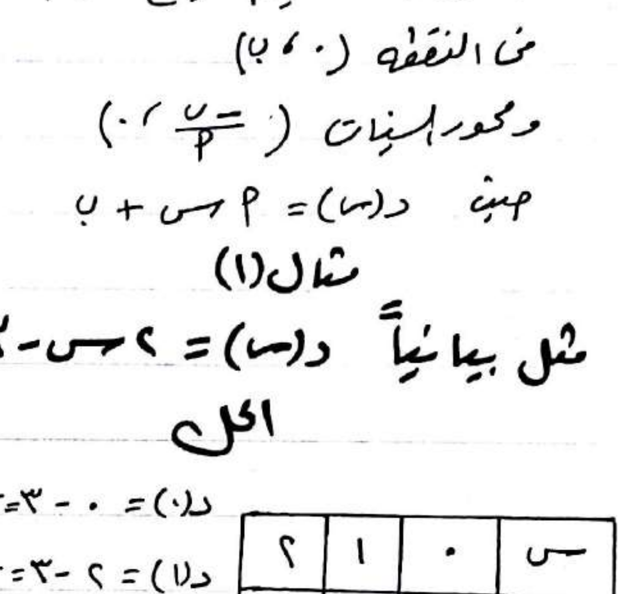
الحل

د(٠) = ٠ - ٣ = -٣

د(١) = ٢ - ٣ = -١

د(٢) = ٤ - ٣ = ١

س	٠	١	٢
ص = د(س)	-٣	-١	١



مثل بيانياً د(س) = ٣س - ٣

الحل ((تمرين))

ملاحظه د: ح ← ح حيث د(س) = أس ، أ ∈ ح * تمثل بخط مستقيم يمر بنقطه الاصل .

تمرين مثل بيانياً كل من الدوال الاتيه

١) د(س) = س - ٢

٢) د(س) = ٢س

٣) د(س) = ٣س - ٥

ثانياً الداله الثابته

د: ح ← ح حيث د(س) = ب ، ب ∈ ح

تسمى داله ثابته وهي كثيرة حدود من الدرجه صفر

فمثلاً إذا كان د(س) = ٥

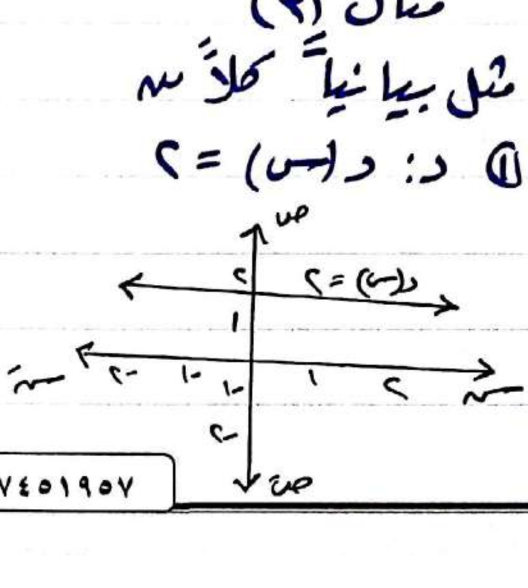
فإن د(١) = ٥ د(٣) = ٥

د(٠) = ٥ وهكذا

مثال (٢)

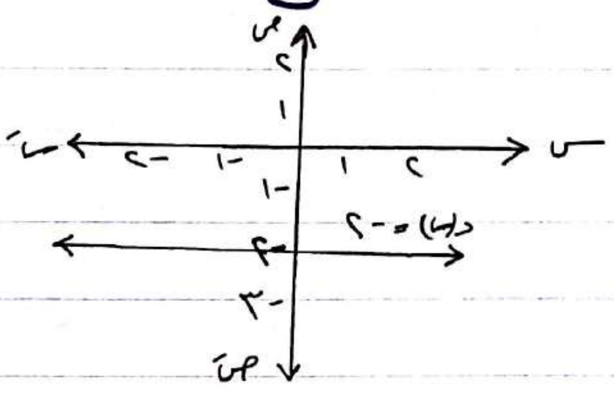
مثل بيانياً كلاً من

١) د: د(س) = ٢

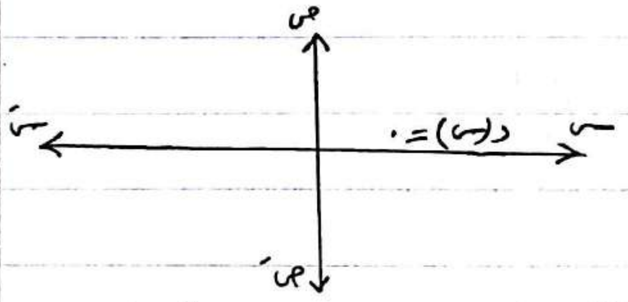


(٢) د(س) = −٢

الحل



(٣) د(س) = ٠ (محور السينات)



المستقيم منطبق على محور السينات

مثال (٤)

مثل بيانياً د(س) = −٥

ثم أوجد

(١) درجة الدالة د — الدرجة الصفرية

(٢) د(٥) — د(٥) = −٥

(٣) د(١) + د(٢) — د(١) = −٥

د(٢) = −٥ — د(١) + د(٢) = −٥ + (−٥) = −١٠

(٤) د(−س)

د(−س) =

ثالثاً : الدالة التربيعية

الدالة د : ح ← ح حيث د(س) =
د(س) = أ س^٢ + ب س + جـ تسمى دالة تربيعية (كثيرة حدود من الدرجة الثانية)

أمثلة

د : ح ← ح ، د(س) = س^٢

د : ح ← ح ، د(س) = −س^٢

د : ح ← ح ، د(س) = س^٢ − ٧

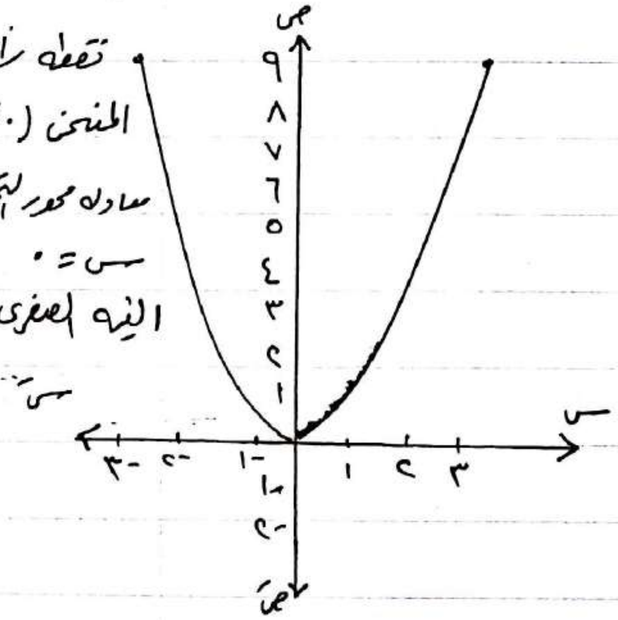
د(س) = ٧ − س^٢ + س

مثال (١)

مثل بيانياً د : د(س) = س^٢ حيث س ∈ [−٣ ، ٣]

الحل

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة الصغرى = ٠

شوية ملاحظات زى الفل

١) إذا كان معامل $س^٢$ موجب فإن المنحنى يكون مفتوحاً لأعلى ويكون للدالة قيمة صغرى

٢) إذا كان معامل $س^٢$ سالب فإن المنحنى يكون مفتوحاً لأسفل ويكون للدالة قيمة عظمى

٣) نقطة رأس المنحنى فى الغالب تتكون فى منتصف الجدول $(س_١ ، ص_١)$

٤) معادلة محور التماثل هى $س = س_١$

٥) القيمة العظمى أو الصغرى هى $ص = ص_١$

٦) الاحداثى السينى لرأس المنحنى $= \frac{-ب}{٢أ}$ والاحداثى الصادى $= د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

٧) إذا كان المنحنى يقطع محور السينات فى نقطة فإن الاحداثى الصادى = صفر

مثال (١)

ارسم منحنى الدالة $د(س) = س^٢ - ٢س - ٣$ متخذاً $س \in [-٢ ، ٤]$ ومن الرسم أوجد

١) نقطة رأس المنحنى

٢) معادلة محور التماثل

٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

الحل

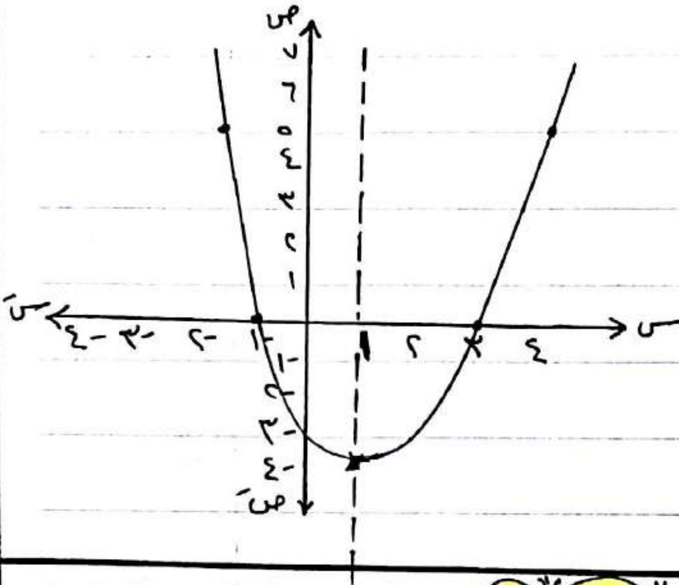
س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص = د(س)	٥	٠	-٣	$\boxed{-٤}$	-٣	٠	٥

١) نقطة رأس المنحنى $(١ ، -٤)$

٢) معادلة محور التماثل $س = ١$

٣) القيمة الصغرى للدالة $= -٤$

* لو سأل عن القيمة العظمى الاجابة لا توجد



تمرين (١)

ارسم منحنى الدالة $د(س) = ٢ - س^٢$ متخذاً $س \in [-٣ ، ٣]$ ومن الرسم أوجد

١) نقطة رأس المنحنى

٢) معادلة محور التماثل

٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

الحل

الواجب

١ مثل بيانياً كلاً من الدوال الاتية حيث س ∈ ح :

① د : د(س) = ٥ ② د(س) = -٤

③ د(س) = صفر ④ د(س) = ٢ ½

٢ مثل بيانياً كلاً من الدوال الخطية الاتية وأوجد نقطتي تقاطع المستقيم الممثل لها مع محوري الإحداثيات

① د(س) = ٣س ② د(س) = -٢س

③ د(س) = س + ٢ ④ د(س) = ٢ - س

⑤ د(س) = ٣س - ١ ⑥ د(س) = -٢س + ٣

٣ مثل بيانياً كلاً من الدوال الاتية ومن الرسم استنتج

إحداثي رأس المنحنى

معادلة محور التماثل

القيمة العظمى أو الصغرى

① د(س) = س² - ٢ ، س ∈ [-٣ ، ٣]

② د(س) = س² + ٢س + ١ [-٤ ، ٢]

③ د(س) = (س - ٢)² [-١ ، ٥]

④ د(س) = ١ - ٣س + س² [-١ ، ٤]

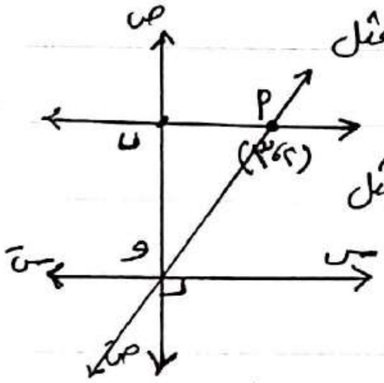
⑤ د(س) = -٢س² [-٢ ، ٢]

٤ إذا كان المنحنى د(س) = م س² يقطع محور السينات في (-٢ ، ٧) فأوجد قيمة م² + ٢م

(الشرقية ٢٠١٥)

٥ إذا كان د(س) = ٢س + ب ، ر(س) = ب حيث د ، ر كثيرات حدود وكان د(١) + ر(٤) = ١٢ فأوجد قيمة د(٤) + ر(-١) (الشرقية ٢٠١٣)

٦ من الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٤)



الدالة الثابتة ر تمثل بالمستقيم ب أ

والدالة الخطية ر تمثل بالمستقيم و أ

حيث أ (٢ ، ٣)

① اكتب قاعدة الدالة د ، الدالة ر

② أوجد قيمة د(-١٠) + ر(٦)

٧ إذا كان د(س) = س² ، [-٢ ، ٢] فإن د(س) ∈ ----

٨ المستقيم المنطبق على محور السينات هو المستقيم الممثل للدالة د(س) = ---

٩ إذا كانت د(س) = -٣ فإن د(١) = ...

١٠ إذا كان د(س) = ٢ فإن د(١) + د(-١) = ...

١١ إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على خط المستقيم الدالة د(س) = ٤س - ٥ فإن أ = ---

١٢ إذا كان لمنحنى الدالة التربيعية قيمة عظمى فإن المنحنى يكون مفتوحاً --- ويكون إشارة س² ---

١ ـ النسبة

تعريف النسبة

النسبة بين الكميتين P ، ب هي عدد مرات احتواء العدد P على العدد ب

وتكتب

P : ب أو $\frac{P}{ب}$

ويسمى P مقدم النسبة ، ب تالى النسبة ، P وب معاً حدى النسبة

خواص النسبة

خاصية (١)

النسبة لا تتغير إذا ضرب حداها في أو قسما على عدد حقيقى لا يساوى صفر

$\frac{٣}{٥} = \frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٦}{١٠}$ وهكذا

وكذلك $\frac{٨}{١٠} = \frac{٨ \div ٢}{١٠ \div ٢} = \frac{٤}{٥}$

خاصية (٢)

النسبة تتغير إذا أضيف إلى أو طرح من حديها عدد حقيقى لا يساوى الصفر

$\frac{٣}{٥} \neq \frac{٣+٥}{٥+٥} \neq \frac{٨}{١٠}$

خاصية (٣) حاصل ضرب الطرفين = الوسطين

إذا كان $\frac{P}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فإن $P \times د = ب \times جـ$

ملاحظة

إذا كانت النسبة بين عددين ٣ : ٥ فإننا نفرض أن العدد الأول = ٣ س والثانى ٥ س

((أو أى ثابت آخر))

مثال (١)

عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٤ وإذا أضيف للعدد الأصغر ٤ ، وطرح من العدد الأكبر ٣ صارت النسبة ٨ : ٩ أوجد العددين

الحل

نفرض أن العدد الأصغر = ٣ س

والعدد الأكبر = ٤ س

$\therefore \frac{٣س + ٤}{٤س - ٣} = \frac{٨}{٩}$

$٩(٣س + ٤) = ٨(٤س - ٣)$

$٢٧س + ٣٦ = ٣٢س - ٢٤$

$٢٧س - ٣٢س = -٢٤ - ٣٦$

$-٥س = -٦٠$

$س = \frac{-٦٠}{-٥} = ١٢$

$\therefore$ العدد الأصغر = ٣ × ١٢ = ٣٦

العدد الأكبر = ٤ × ١٢ = ٤٨

تمرين (١)

أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

تمرين (٢)

ما العدد الموجب الذى إذا طرح من مقدم النسبة ١٣ : ١٠ وأضيف مربعه إلى تاليها فإن النسبة = المعكوس الجمعى للعدد ٥

٢ – التناسب

تعريف التناسب ((مهم))

هو تساوي نسبتين أو أكثر

ملاحظات هامة

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن

① $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فيكون أ × د = ب × جـ

② ويسمى أ بالأول المتناسب

ب الثاني المتناسب

جـ الثالث المتناسب

د الرابع المتناسب

③ يسمى أ ، د طرفا التناسب

، ب ، جـ وسطا التناسب

مثال (١)

① أوجد الثالث المتناسب للكميات ٣ ، ٤ ، ... ، ٢٠

الحل

$\frac{3}{4} = \frac{\text{س}}{20}$

$\text{س} = \frac{3 \times 20}{4} = \frac{60}{4} = 15$

② أوجد الرابع المتناسب للكميات ١٨ أ²ب ، ١٢ أب² ، ٢١ أب ، ...

الحل

$\frac{18\,\text{أ}^2\text{ب}}{12\,\text{أ}\text{ب}^2} = \frac{21\,\text{أ}\text{ب}}{\text{س}}$

$\text{س} = \frac{12\,\cancel{\text{أ}}\text{ب}^2 \times 21\,\cancel{\text{أ}}\cancel{\text{ب}}}{18\,\cancel{\text{أ}^2}\cancel{\text{ب}}}$

$\text{س} = \frac{12 \times 21}{18}\text{ب}^2 = 14\,\text{ب}^2$

تمرين (١)

① أوجد الثالث المتناسب للكميات ٥ أب ، ٢ أب² ، ٤ أ²ب

الحل

② أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة ١٧ : ٢٢ فإننا نحصل على النسبة ٦ : ٧

الحل

③ أوجد الثاني المتناسب للكميات (س² − ٣س) ، (س² − ٩) ، (س + ٣)

الحل

④ أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى الأعداد ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٣ لحصلنا على أعداد متناسبة

خواص التناسب

خاصيه (١) الضرب التبادلى

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن

$أ \times د = ب \times جـ$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

خاصيه (٢)

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فإن أ = م × جـ ، ب = م × د

حيث م ∈ ح*

أى أن مقدم = ثابت × مقدم

وتالى = ثابت × تالى

فمثلاً $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$

فإن أ = ٢م ، ب = ٣م

مثال (١)

إذا كان س : ص = ٢ : ٣

فأوجد النسبه (٣س + ٢ص) : (٢س + ص)

الحل

∵ $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

∴ س = ٢م ، ص = ٣م

∴ $\frac{٣س + ٢ص}{٢س + ص} = \frac{٣ \times ٢م + ٢ \times ٣م}{٢ \times ٢م + ٣م}$

$= \frac{٦م + ٦م}{٤م + ٣م} = \frac{١٢م}{٧م} = \frac{١٢}{٧}$

مثال (٢)

إذا كان أ : ب = ١ : ٢

، س : ص = ٣ : ٥

فأوجد النسبه (٢أس + بص) : (٥بس − ٢أص)

الحل

∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ ∴ أ = ك ، ب = ٢ك

، ∵ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ ∴ س = ٣م ، ص = ٥م

∴ $\frac{٢أس + بص}{٥بس - ٢أص} = \frac{٢ \times ك \times ٣م + ٢ك \times ٥م}{٥ \times ٢ك \times ٣م - ٢ \times ك \times ٥م}$

$= \frac{٦كم + ١٠كم}{٣٠كم - ١٠كم} = \frac{١٦\cancel{كم}}{٢٠\cancel{كم}} = \frac{٤}{٥}$

مثال (٣) إذا كان

أ : ب = ٢ : ٣ ، ب : جـ = ٢ : ٥

وكان ٣أ + ب − د = ٩ فأوجد قيمه كلاً من أ ، ب ، د

الحل

أ : ب : جـ

٢ : ٣ بالضرب × ٢

٢ : ٥ بالضرب × ٣

فيكون أ : ب : د

٤ : ٦

٦ : ١٥

∴ أ : ب : د = ٤ : ٦ : ١٥

∴ أ = ٤م ، ب = ٦م ، د = ١٥م

، ∵ ٣أ + ب − د = ٩

١٢م + ٦م − ١٥م = ٩ ٣م = ٩

∴ م = ٣ فيكون أ = ١٢ ب = ١٨ د = ٤٥

تمرين (١)

إذا كان أ/ب = ٢/٣ ، س/ص = ٣/٥

فأثبت أن (٧أس + ٤بص) ، (١١أص + بس) ، ١٢ ، ١٤ كميات متناسبة

الحل

خاصية (٣)

إذا كان أ/ب = جـ/د فإن أ/جـ = ب/د

أ/جـ = ب/د أي أن مقدم ١ / مقدم ٢ = تالي ١ / تالي ٢

مثلاً إذا كان أ/٧ = ب/٢١

فإن أ/ب = ٧/٢١ = ١/٣

إذا كان ٥أ ، ٢ص ، ٣ب ، ٧ص كميات متناسبة فإن

٥أ/٢ص = ٣ب/٧ص

٥أ/٣ب = ٢ص/٧ص

٥أ/٣ب = ٢/٧

أ/ب = ٢/٧ × ٣/٥ = ٦/٣٥

خاصية (٤)

إذا كان أ × د = ب × جـ فإن

أ/ب = جـ/د

مثلاً إذا كان

٣س = ٥ص فإنه س/ص = ٥/٣

٧أ = ٢ب فإن أ/ب = ٢/٧

مثال (١) أوجد س/ص لكل مما يأتي

(١) ١٢س = ٣ص

س/ص = ٣/١٢ = ١/٤

(٢) ١/٢ س = ٣/٤ ص

س/ص = ٣/٤ ÷ ١/٢ = ٣/٤ × ٢/١ = ٣/٢

(٣) ٣أ − ٧ب = ٠

٣أ = ٧ب

أ/ب = ٧/٣

مثال (٢) إذا كان

٤س − ٣ص : ٢س + ص = ٤ : ٧

فأوجد في أبسط صورة س : ص

الحل

(٤س − ٣ص)/(٢س + ص) = ٤/٧

٧(٤س − ٣ص) = ٤(٢س + ص)

٢٨س − ٢١ص = ٨س + ٤ص

٢٨ س − ٨ س = ٤ ص + ٢١ ص

٢٠ س = ٢٥ ص

$\frac{س}{ص} = \frac{٢٥}{٢٠} = \frac{٥}{٤}$

تمرين إذا كان

$٢ س^2 − ٦ ص^2 = س ص$

فأوجد س : ص

الحل

عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٥ فإذا طرح من الأول ٢ وأضيف للثانى ١ صارت النسبة ١ : ٤ أوجد العددين

الحل

الواجب

١) أوجد العدد الذى إذا أضيف الى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

٢) أوجد العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح ٢ : ٣

٣) أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

٤) عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ إذا طرح من كل منهما ٥ اصبحت النسبة ١ : ٣ أوجد العددين

٥) عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ وإذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثانى ١٢ صارت النسبة ٥ : ٣ أوجد العددين

٦) أوجد الاول المتناسب

(٥ ، ٩ ، ١٥) ، (٤ ، ٥ ، ٢٠)

٧) أوجد الثانى المتناسب

$٥ ل^3 م$ ، $١٥ ل^2 م$ ، $٦ م^2$

٨) أوجد الثالث المتناسب

٣ ، ٢٠ ، ؟

١ ، $\sqrt{٨}$ ، $١٤\sqrt{٢}$

$(أ^2 + أ)$ ، $(٢أ^2 + ٢أ)$ ، ٦

٩) أوجد الرابع المتناسب

$٢ أ ب$ ، $أ^2$ ، $٤ أ^2 ب$

(١٠) اوجد العدد الذى إذا أضيف للكميات الاتيه فإنها تصبح متناسبه

١٥ ، ٢٠ ، ١١ ، ١٤

(١١) العدد الذى إذا طرح من الكميات الاتيه فإنها تصبح متناسبه؟

٣ ، ١٠ ، ٢ ، ٨

(١٢) إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

فأوجد قيمه

(١) $\frac{٣س + ٢ص}{٥س - ص}$ (٢) $\frac{س^٢ + ٢ص^٢}{ص^٢ - س^٢}$

(١٣) إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$

فأوجد قيمه $(٧س + ٩ص) : (٤س + ٢ص)$

(١٤) إذا كان س : ص = ١ : ٢

، ع : ل = ٧ : ٢

فأوجد قيمه $\frac{٢س ع + ص ل}{ص ع - ٣س ل}$

(١٥) إذا كان أ : ب = ٣ : ٧

، أ : جـ = ٢ : ٥

وكان ب + جـ − ٣أ = ٣٣

فأوجد قيمه أ ، ب ، جـ

(١٦) إذا كان س : ص : ع = ١ : ٢ : ٥

وكان س + ٢ص + ٣ع = ٨٠

فأوجد قيمه س ، ص ، ع

(١٧) إذا كان ٣س ، ٢ص ، ٦ع ، ٩ص كميات متناسبه فاوجد $\frac{س}{ع}$

(١٨) إذا كان ٢أ = ٣ب = ٤جـ

وكان ٢ب + جـ − أ = ٧٫٥

فأوجد أ ، ب ، جـ

اكمل العبارات الاتيه

(١) ٣س + ٢ص = ٠

فإن $\left(\frac{ص}{س}\right)^٣ = ---$

(٢) ٤٩س² − ١٦ص² = ٠ حيث

س ، ص ∈ ح⁺ فإن $\left(\frac{س}{ص}\right) = ---$

(٣) إذا كان أ : ب = ٢ : ٥

أ : جـ = ٣ : ٤ فإن ب : جـ = ---

(٤) $\frac{٤س^٢ - ٩ص^٢}{------} = \frac{٢س - ٣ص}{٢س + ٣ص}$

(٥) التناسب هو ----

(٦) قسم مبلغ بين شخصين بنسبه ٢ : ٣

فإذا كان نصيب اولهما = ٣٠ جنيها

فإن نصيب الآخر = ---

(٧) ٧س = ٣ص $\Leftarrow \frac{س}{ص} = ---$

(٨) $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣}$ فإن $\frac{٢أ}{٣ب} = ---$

$\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ بالضرب × $\frac{٢}{٣}$

$\frac{٢أ}{٣ب} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٩}$

تابع خواص التناسب

خاصية (٥)

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ... كميات متناسبة فإنه كما سبق يكون:

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \dots = \boxed{\text{ك فرضاً}}$$

ويكون $\text{أ} = \text{ك ب}$ ، $\text{جـ} = \text{ك د}$

$\text{هـ} = \text{ك و}$ وهكذا

أي أن : مقدم = ثابت × تالي

مثال (١)

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثبت أن

(١) $$\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{جـ} + \text{د}}\right)^2 = \frac{2\text{أ}^2 - 3\text{ب}^2}{2\text{جـ}^2 - 3\text{د}^2}$$

الحل

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{ك فرضاً}$$

$\therefore \text{أ} = \text{ك ب}$ ، $\text{جـ} = \text{ك د}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $$= \left(\frac{\text{ك ب} + \text{ب}}{\text{ك د} + \text{د}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب}\cancel{(\text{ك}+1)}}{\text{د}\cancel{(\text{ك}+1)}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب}}{\text{د}}\right)^2 \Leftarrow (1)$$

الطرف الأيسر $$= \frac{2\text{ك}^2\text{ب}^2 - 3\text{ب}^2}{2\text{ك}^2\text{د}^2 - 3\text{د}^2} = \frac{\text{ب}^2\cancel{(2\text{ك}^2 - 3)}}{\text{د}^2\cancel{(2\text{ك}^2 - 3)}} = \left(\frac{\text{ب}}{\text{د}}\right)^2 \Leftarrow (2)$$

$\therefore$ الطرفان متساويان

(٢) $$\sqrt[3]{\frac{5\text{أ}^3 - 3\text{جـ}^3}{5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}}$$

الحل

الطرف الأيمن $$= \sqrt[3]{\frac{5(\text{ك ب})^3 - 3(\text{ك د})^3}{5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{5\text{ك}^3\text{ب}^3 - 3\text{ك}^3\text{د}^3}{5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\text{ك}^3\cancel{(5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3)}}{\cancel{(5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3)}}}$$

$$= \sqrt[3]{\text{ك}^3} = \text{ك} \Leftarrow (1)$$

الطرف الأيسر $$= \frac{\text{ك ب} + \text{ك د}}{\text{ب} + \text{د}}$$

$$= \frac{\text{ك}\cancel{(\text{ب} + \text{د})}}{\cancel{(\text{ب} + \text{د})}} = \text{ك} \Leftarrow (2)$$

من (1) ، (2) $\therefore$ الطرفان متساويان

تمرين

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و كميات متناسبة فاثبت أن

$$\frac{2\text{أ} + \text{جـ}}{2\text{ب} + \text{د}} = \sqrt{\frac{5\text{أ}^2 - 7\text{جـ هـ}}{5\text{ب}^2 - 7\text{د و}}}$$

مثال (٢)

إذا كان $\frac{أ^٢ - ٢ج^٢}{ب^٢ - ٢د^٢} = \frac{أ^٢}{ب^٢}$

أثبت أن

أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

الحل

$\because \frac{أ^٢ - ٢ج^٢}{ب^٢ - ٢د^٢} = \frac{أ^٢}{ب^٢}$

طرفين $\times$ وسطين

$ب^٢(أ^٢ - ٢ج^٢) = أ^٢(ب^٢ - ٢د^٢)$

$أ^٢ب^٢ - ٢ب^٢ج^٢ = أ^٢ب^٢ - ٢أ^٢د^٢$

بحذف $أ^٢ب^٢$ من الطرفين

$-٢ب^٢ج^٢ = -٢أ^٢د^٢ \quad \boxed{\div -٢}$

$ب^٢ج^٢ = أ^٢د^٢$

$\therefore \frac{أ^٢}{ب^٢} = \frac{ج^٢}{د^٢}$ بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين

$\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

$\therefore$ أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

خاصية (٦)

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots = ك$

وكانت $م_١ ، م_٢ ، م_٣ ، \dots$ أعداد حقيقية

فإن $\frac{م_١ أ + م_٢ ج + م_٣ هـ}{م_١ ب + م_٢ د + م_٣ و} = ك$ (إحدى النسب)

أي أن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}} = $ إحدى النسب

مثال (٣)

إذا كان $\frac{أ}{٤س + ص} = \frac{ب}{س - ٤ص}$

أثبت أن $\frac{أ + ب}{٥س - ٣ص} = \frac{أ - ب}{٣س + ٥ص}$

الحل

مفتاح الحل بص لمقام (بسط) النسبة المطلوبة

هتلاقي (بسط) واحد منهم مجموع المقامات

اللي فوق والثاني هو الطرح بتاعهم

$\because \frac{أ}{٤س + ص} = \frac{ب}{س - ٤ص}$

بجمع مقدمات وتوالي النسبتين

$\therefore \frac{أ + ب}{٤س + ص + س - ٤ص} = $ إحدى النسب

$\therefore \frac{أ + ب}{٥س - ٣ص} = $ إحدى النسب $\leftarrow (١)$

بضرب حدي النسبة الثانية $\times (-١)$ وجمع مقدمات وتوالي النسبتين

$\frac{أ - ب}{٤س + ص - س + ٤ص} = $ إحدى النسب

$\frac{أ - ب}{٣س + ٥ص} = $ إحدى النسب $\leftarrow (٢)$

من (١) ، (٢) $\therefore \frac{أ + ب}{٥س - ٣ص} = \frac{أ - ب}{٣س + ٥ص}$

مع الأدهم انت دايماً متفوق
الرياضيات متعة الحياة

مثال (٤)

إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢أ + ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب - جـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢جـ - أ}}$

فاثبت أن

$$\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب - جـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$$

الحل

بص لبسط المطلوب وانت هتعرف

* بضرب حدى النسبه الاولى × (٢) والجمع مع النسبه الثانيه

$\text{إحدى النسب} = \frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٢ب + ٢ب - جـ}}$

$\text{إحدى النسب} = \frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب - جـ}}$ ← (١)

* بضرب حدى النسبه الاولى × (٢) والثانيه × (٢) وجمع مقدمات وتوالى الثلاث نسب

$\text{احدى النسب} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٤أ + ٢ب + ٤ب - ٢جـ + ٢جـ - أ}}$

$\text{احدى النسب} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴

$$\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب - جـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$$

#

مثال (٥)

إذا كان $\frac{\text{أ + ٣ب}}{\text{س + ٥ع}} = \frac{\text{٣ب + ٥جـ}}{\text{٥ص + ٧ع}} = \frac{\text{٥جـ + أ}}{\text{٧ع + س}}$

فاثبت أن $\frac{\text{أ}}{\text{٣ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٥ص}}$

يعنى $\boxed{\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}}$

الحل

بضرب حدى النسبه الثانيه × (−١) وجمع الثلاث نسب

∴ $\text{احدى النسب} = \frac{\text{أ + ٣ب - ٣ب - ٥جـ + ٥جـ + أ}}{\text{س + ٥ص - ٥ص - ٧ع + ٧ع + س}}$

$= \frac{\text{٢أ}}{\text{٢س}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} = \text{احدى النسب}$ (١)

بضرب حدى النسبه الثالثه × (−١) وجمع النسب الثلاثه

∴ $\text{احدى النسب} = \frac{\text{أ + ٣ب + ٣ب + ٥جـ - ٥جـ - أ}}{\text{س + ٥ع + ٥ص + ٧ع - ٧ع - س}}$

$= \frac{\text{٦ب}}{\text{١٠ص}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}} = \text{احدى النسب}$ (٢)

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}$ ومنها $\frac{\text{أ}}{\text{٣ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٥ص}}$

#

تمرين (١)

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢أ - ب + ٥جـ}}{\text{٣س}}$

فأوجد قيمة س

الحل

الواجب

١ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت أن

① $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$

② $\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د} = \frac{أ - ٢جـ}{ب - ٢د}$

③ $\frac{أ^{٢} - جـ^{٢}}{ب^{٢} - د^{٢}} = \frac{أ جـ}{ب د}$

④ $\sqrt{\frac{٣أ^{٢} - ٥جـ^{٢}}{٣ب^{٢} - ٥د^{٢}}} = \frac{أ + جـ}{ب + د}$

٢ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و كميات متناسبة فأثبت أن

① $\frac{أ + ٥جـ}{ب + ٥د} = \frac{جـ - ٣هـ}{د - ٣و}$

② $\sqrt{\frac{٢أ^{٢} - ٣جـ هـ}{٢ب^{٢} - ٣د و}} = \sqrt[٣]{\frac{أ جـ هـ}{ب د و}}$

٣ أثبت أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة إذا كان

① $\frac{أ}{أ - ب} = \frac{جـ}{جـ - د}$ ② $\frac{أ + ب}{أ - ب} = \frac{جـ + د}{جـ - د}$

٤ إذا كان $\frac{س}{أ - ب + جـ} = \frac{ص}{ب - جـ + أ} = \frac{ع}{جـ - أ + ب}$

اثبت أن $\frac{س + ص}{أ} = \frac{ص + ع}{ب}$

٥ إذا كان

$\frac{أ}{٢س - ص} = \frac{ب}{٢ص - س}$ فأثبت أن

$\frac{٢أ + ب}{أ + ٢ب} = \frac{س}{ص}$

٦ إذا كان $\frac{س + ص}{٧} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{ع + س}{٨}$

اثبت أن

$\frac{س + ص + ع}{س - ع} = ٥$

٧ إذا كان $\frac{أ + ب}{٣} = \frac{ب + جـ}{٦} = \frac{جـ + أ}{٥}$

فأثبت أن

$\frac{أ + ب + جـ}{أ} = ٧$

أكمل العبارات الآتية

① إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{٣}{٧}$

فإن $\frac{أ + جـ}{ب + د} = ---$

② $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{١}{٣}$

فإن $\frac{أ - ٥جـ + هـ}{ب - ٥د + و} = ---$

③ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{٢أ + ... - ٣هـ}{.... + ٤د - ....}$

④ $\frac{س}{٢} = ص = \frac{ع}{٦} = \frac{س + ص + ع}{----}$

$= \frac{ع - ص - س}{----}$

التناسب المتسلسل

ملاحظات

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإن

① أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل

أ ← الاول المتناسب ، ب ← الوسط المتناسب (الوسط الهندسى) ، جـ ← الثالث المتناسب

② الكميتين أ ، جـ يجب ان يكونا موجبين معاً أو سالبين معاً

③ ∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

∴ أ جـ = $ب^2$

$\boxed{أ = \frac{ب^2}{جـ}}$

$\boxed{جـ = \frac{ب^2}{أ}}$

$\boxed{ب = \pm\sqrt{أ جـ}}$

④ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل فإن

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ (فرضاً)

∴ جـ = د م

ب = د $م^2$

أ = د $م^3$

ملحوظة

أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل أو ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ نفس المعنى

مثال (١)

أوجد قيمة "س" فى كل مما يلى بحيث تكون الكميات فى تناسب متسلسل

① س ، ٤ ، ٨

الاول = $\frac{\text{مربع الاوسط}}{\text{الثالث}}$

س = $\frac{(٤)^2}{٨} = \frac{١٦}{٨} = ٢$

② ٢ ، ٦ ، س

الثالث = $\frac{\text{مربع الاوسط}}{\text{الاول}}$

= $\frac{(٦)^2}{٢} = \frac{٣٦}{٢} = ١٨$

③ ٣ ، س ، ١٢

الاوسط = $\pm\sqrt{\text{الاول} \times \text{الثالث}}$

= $\pm\sqrt{٣ \times ١٢} = \pm ٦$

تدريب

أوجد قيمة س لكي تكون فى تناسب متسلسل

① ٣ ، س ، ٢٧

② ٦ ، ١٢ ، س

③ $\frac{١}{٥}$ ، س ، ١٢٥

④ ٢أ ، س ، ٨ أ $ب^2$

⑤ س ، ٦ ، ١٢

⑥ −٢ ، س ، −٨

⑦ س ، ٦ ، ١٨

⑧ ٩ ، −١٢ ، س

مثال (٢)

إذا كان أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل فأثبت أن

(١) $\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$

∴ $\text{ب} = \text{جـ م}$ ، $\text{أ} = \text{جـ م}^2$

* الطرف الأيمن $= \frac{(\text{جـ م}^2)^2 + (\text{جـ م})^2}{(\text{جـ م})^2 + \text{جـ}^2}$

$= \frac{\text{جـ}^2\text{م}^4 + \text{جـ}^2\text{م}^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2 + \text{جـ}^2} = \frac{\cancel{\text{جـ}^2}\,\text{م}^2\cancel{(\text{م}^2+1)}}{\cancel{\text{جـ}^2}\cancel{(\text{م}^2+1)}}$

$= \boxed{\text{م}^2} \Leftarrow$ (١)

* الطرف الأيسر $= \frac{\cancel{\text{جـ}}\,\text{م}^2}{\cancel{\text{جـ}}} = \boxed{\text{م}^2}$

∴ الطرفان متساويان

(٢) $\frac{\text{أ}^2+\text{أ ب}+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{ب جـ}+\text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}^2-\text{ب}^2}{\text{ب}^2-\text{جـ}^2}$

الحل

مثال (٣)

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فأثبت أن

$\frac{\text{أ} - \text{د}}{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}} = \frac{\text{أ} - ٢\text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ} - \text{ب}}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ (فرضاً)

∴ $\text{جـ} = \text{د م}$ ، $\text{ب} = \text{د م}^2$ ، $\text{أ} = \text{د م}^3$

الطرف الأيمن $= \frac{\text{د م}^3 - \text{د}}{\text{د م}^3 + \text{د م}^2 + \text{د م}}$

$= \frac{\text{د}(\text{م}^3 - 1)}{\text{د م}(\text{م}^2+\text{م}+1)} = \frac{\cancel{\text{د}}(\text{م}-1)\cancel{(\text{م}^2+\text{م}+1)}}{\cancel{\text{د}}\,\text{م}\cancel{(\text{م}^2+\text{م}+1)}}$

$= \frac{\text{م}-1}{\text{م}} \Leftarrow$ (١)

الطرف الأيسر $= \frac{\text{د م}^3 - ٢\text{د م}^2 + \text{د م}}{\text{د م}^3 - \text{د م}^2}$

$= \frac{\text{د م}(\text{م}^2 - ٢\text{م} + 1)}{\text{د م}^2(\text{م} - 1)} = \frac{\cancel{\text{د م}}\,\cancel{(\text{م}-1)^2}}{\cancel{\text{د م}}\,\text{م}\cancel{(\text{م}-1)}}$

$= \frac{\text{م}-1}{\text{م}} \Leftarrow$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

مثال (٤)

إذا كان ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ وكانت د وسطاً متناسباً بين ب ، م

فاثبت أن

$$\frac{\text{أ}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ب}^2}{\text{د}^2} + \frac{\text{د}^2}{\text{م}^2} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} + \frac{\text{ب}}{\text{م}} + \frac{\text{دم}}{\text{بم}}$$

الحل

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د}}{\text{م}} = \text{ك} \quad \text{فرضاً}$$

$$\text{جـ} = \text{م ك} \qquad \text{ب} = \text{م ك}^2 \qquad \text{أ} = \text{م ك}^3$$

الطرف الأيمن =

الطرف الأيسر =

الواجب

١) أوجد الأول المتناسب لكل من

① ٤ ، ٨ ② $\text{أ ر} ، \text{أ ر}^2$

٢) أوجد الثالث المتناسب لكل من

① ٦ ، ١٢ ② $\text{س}^2 ، -٣\text{س}^4$

٣) أوجد الوسط المتناسب لكل من

① ٣ ، ٢٧ ② ١ ، ٩

③ $٨\text{س}^2 ، ٢\text{ص}^4$ ④ −٢ ، −١٨

⑤ ٢ ، ٥٠ ⑥ −٤ ، −٩

٤) إذا كان ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ (أ ، ب ، جـ) فى تناسب متسلسل فاثبت أن

① $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{جـ}} = \frac{\text{أ} + ٣\text{ب}}{\text{ب} + ٣\text{جـ}}$

② $\left(\frac{\text{ب} - \text{جـ}}{\text{أ} - \text{ب}}\right)^2 = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

③ $\frac{\text{أ}^3 - ٤\text{ب}^3}{\text{ب}^3 - ٤\text{جـ}^3} = \frac{\text{ب}^3}{\text{جـ}^3}$

④ $\frac{٢\text{جـ}^2 - ٣\text{ب}^2}{٢\text{ب}^2 - ٣\text{أ}^2} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جـ}^2}{\text{ب}^2}$

٥) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل فاثبت أن

① $\frac{\text{أ} - ٢\text{ب}}{\text{ب} - ٢\text{جـ}} = \frac{٣\text{ب} + ٤\text{جـ}}{٣\text{جـ} + ٤\text{د}}$

② $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}}\right)^2 = \frac{\text{أ}}{٢\text{جـ}} + \frac{\text{ب}}{٢\text{د}}$

③ $\frac{\text{أ ب} - \text{جـ د}}{\text{ب}^2 - \text{جـ}^2} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}}$

④ $\frac{٢\text{أ}^3 + ٣\text{ب}^3}{٣\text{أ}^3 - ٤\text{ب}^3} = \frac{٢\text{أ} + ٣\text{د}}{٣\text{أ} - ٤\text{د}}$

٦) إذا كان س ، ٣ ، ٩ ، ص فى تناسب متسلسل فاوجد قيمة س ، ص

٧) إذا كان ٢ ، س ، س+٤ ، ١٨ كميات متناسبة فاوجد قيمة س

٨) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١ ، ٥ ، ١٣ فإنها تصبح متناسبة

٣ ـ التغير الطردى

شوية ملاحظات زى الفل

١- يقال أن ص تتغير طردياً مع س ويكتب ص ∝ س إذا كان

$\boxed{ص = م\,س}$ أو $\boxed{\frac{ص}{س} = م}$ ⇐ (ص = ثابت × س) ($\frac{ص}{س}$ = ثابت)

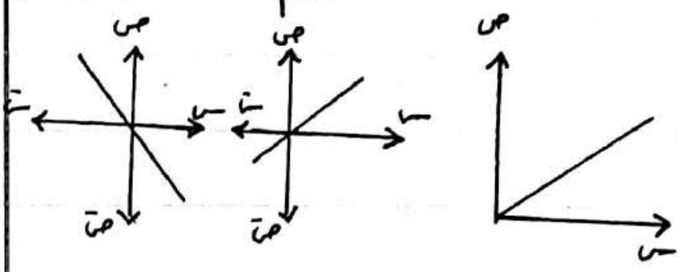
حيث م (ثابت حقيقي لا يساوي الصفر)

٢- في حالة التغير الطردي بين كميتين يكون

$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$ والعكس صحيح

٣- التمثيل البياني للعلاقة الطردية

عبارة عن خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠،٠)



لذلك (أي مستقيم لا يمر بنقطة الأصل لا يمثل تغير طردي)

مثال (١)

إذا كان ص ∝ س وكانت ص = ١٥ عندما س = ٣

أوجد

① العلاقة بين س ، ص

الحل

∵ ص ∝ س ∴ ص = م س

، ص = ١٥ عندما س = ٣

١٥ = م × ٣ ∴ م = $\frac{١٥}{٣}$ = ٥

∴ العلاقة هي $\boxed{ص = ٥\,س}$

② أوجد قيمة ص عندما س = ٧

ص = ٥ س

ص = ٥ × ٧ = ٣٥

③ قيمة س عندما ص = ٩٠

ص = ٥ س

٩٠ = ٥ س

س = $\frac{٩٠}{٥}$ = ١٨

تمرين (١)

إذا كان ص ∝ س وكانت ص = ١٢ عندما س = ٣ فأوجد

① العلاقة بين س ، ص

② قيمة ص عندما س = ٩

③ قيمة س عندما ص = ٦

مثال (٢)

إذا كان ص ∝ ∛س
وكانت ص = ٢/٣ عندما س = ٨
أوجد قيمة س عندما ص = ١

الحل

∵ ص ∝ ∛س

∴ ص١ / ص٢ = ∛س١ / ∛س٢

ص١ = ٢/٣ ، س١ = ٨

ص٢ = ١ ، س٢ = ؟؟

∴ (٢/٣) / ١ = ∛٨ / ∛س٢

∴ ٢/٣ = ٢ / ∛س٢

٢ ∛س٢ = ٦

∛س٢ = ٣ بتكعيب الطرفين

∴ س٢ = (٣)³ = ٢٧

تمرين (٢)

إذا كان ص ∝ √س وكانت ص = ١٠ عندما س = ٤ أوجد

(١) العلاقة بين س ، ص

(٢) قيمة ص عندما س = ٣٦

(٣) قيمة س عندما ص = ١٥

مثال (٣)

إذا كان (٢١س − ص) / (٧س − ع) = ص / ع

اثبت أن ص ∝ ع

الحل

∵ (٢١س − ص) / (٧س − ع) = ص / ع

∴ ص (٧س − ع) = ع (٢١س − ص)

٧س ص − ~~ص ع~~ = ٢١س ع − ~~ص ع~~

∴ ٧س ص = ٢١س ع

بالقسمة على ٧س

ص = ٣ع

∴ ص / ع = ٣ (ثابت)

∴ ص ∝ ع

> لإثبات أن ص ∝ ع نثبت أن ص/ع = ثابت
> أو ص = ثابت × ع

تمرين (٣)

إذا كان ٤س² + ٩ص² = ١٢س ص
فأثبت أن س ∝ ص

الحل

لاحظ: ص ∝ س ∴ ص = م س
أما س ∝ ص ∴ س = م ص

٤ ـ التغير العكسى

شويه ملاحظات كويسين

١ يقال أن ص تتغير عكسياً مع س وتكتب $ص \propto \frac{١}{س}$.

إذا كان $\boxed{ص = \frac{م}{س}}$ ← $\frac{ثابت}{س}$

أو $\boxed{ص س = م}$ ← ص س = ثابت ← تستخدم لإثبات التناسب العكسى

ويكون $\boxed{\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}}$

مثال (١)

إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ٦ عندما س = ٢,٥ فأوجد العلاقة بين س، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥

الحل

$\because ص \propto \frac{١}{س} \quad \therefore س ص = م$

$\because ص = ٦$ ، عندما $س = ٢,٥$

$\therefore م = ٦ \times ٢,٥ = ١٥$

$\therefore$ العلاقة هى $\boxed{س ص = ١٥}$

عندما $س = ٥$

$\therefore ٥ ص = ١٥ \quad \therefore ص = \frac{١٥}{٥} = ٣$

ماهو الشئ الذى يظل حاراً حتى لو وضع فى الثلاجه ؟

تمرين (١)

إذا كان $ص \propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٤ عندما س = ٦ فأوجد

١ العلاقة بين س، ص

٢ قيمة ص عندما س = ٣

٣ قيمة س عندما ص = ٢

الحل

مثال (٢)

$ص^٢ = \frac{م}{س^٣}$ ⟸

إذا كان $ص^٢ \propto \frac{١}{س^٣}$ وكانت $ص = \frac{١}{٣}$ عندما س = ٣ أوجد

١ العلاقة بين ص، س

الحل

$\because ص^٢ \propto \frac{١}{س^٣} \quad \therefore ص^٢ س^٣ = م$

$\because ص = \frac{١}{٣}$ ، $س = ٣$

$\therefore م = (\frac{١}{٣})^٢ \times (٣)^٣ = \frac{١}{٩} \times ٢٧ = \frac{٢٧}{٩}$

$م = \frac{٢٧}{٩} = ٣$

$\therefore$ العلاقة هى $\boxed{ص^٢ = \frac{٣}{س^٣}}$

② عندما ص = $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

∴ $\left(\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}\right)^{٢} = \frac{٣}{س^{٣}}$

$\frac{٨}{٩} = \frac{٣}{س^{٣}}$

∴ $س^{٣} = \frac{٣ \times ٩}{٨} = \frac{٢٧}{٨}$

بأخذ $\sqrt[٣]{}$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

تمرين (٢)

إذا كان ص = م + ٥

حيث م ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

وكانت ص = ٩ عندما س = ½

أوجد ① العلاقة بين ص ، س

② قيمة س عندما ص = ٦

الحل

∵ م ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$ ∴ م = $\frac{م}{س^{٢}}$

∴ ص = $\frac{م}{س^{٢}}$ + ٥ (لا أكمل)

مثال (٣)

إذا كان $س^{٤} ص^{٢} - ١٤ س^{٢} ص + ٤٩ = ٠$

فأثبت أن ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

الحل

∵ $س^{٤} ص^{٢} - ١٤ س^{٢} ص + ٤٩ = ٠$

∴ $(س^{٢} ص - ٧)(س^{٢} ص - ٧) = ٠$

∴ $س^{٢} ص - ٧ = ٠$

∴ $س^{٢} ص = ٧$ (ثابت)

∴ ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

لإثبات أن ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$ نثبت أن ص × $س^{٢}$ = ثابت

تمرين (٣)

إذا كان $س^{٦} ص^{٢} = ٣ س^{٣} ص + ٤ ص^{٢}$

اثبت أن ص ∝ $س^{-٣}$ (معناها ص ∝ $\frac{١}{س^{٣}}$)

مثال (٤)

إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ وكانت ص = ٥ عندما س = ٨

فأوجد قيمة س عندما ص = ٢

الحل

∴ ص ∝ $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

∴ $\frac{ص_{١}}{ص_{٢}} = \frac{\sqrt[٣]{س_{٢}^{٢}}}{\sqrt[٣]{س_{١}^{٢}}}$

$\frac{٥}{٢} = \frac{\sqrt[٣]{س_{٢}^{٢}}}{\sqrt[٣]{٨^{٢}}} \Leftarrow \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}}}{٢}$

$\frac{٥}{٢} = \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}}}{٢}$ ∴ $\sqrt[٣]{س^{٢}} = ٥$

∴ $س^{٢} = ١٢٥$

تمارين على التغير الطردي والعكسي

١ إذا كانت $ص \propto س$ وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ أوجد

① العلاقة بين ص ، س

② قيمة ص عندما س = ٦٠

٢ إذا كانت $ص \propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢ فأوجد

① العلاقة بين س ، ص

② قيمة ص عندما س = ١،٥

٣ إذا كانت ص $\propto$ المقلوب الضربي للمقدار $\frac{1}{س^2}$ وكان ص = ٣ عندما س = ٣ فأوجد

① العلاقة بين س ، ص

② قيمة ص عندما س = ٩

٤ إذا كانت $ص \propto \frac{1}{\sqrt{س}}$ وكانت ص = ٢ عندما س = ١٦ فأوجد قيمة ص عندما س = ٣٢

٥ إذا كانت $ص \propto س$ وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ فأوجد قيمة س عندما ص = ٤٠

٦ إذا كانت $ص^2 \propto س^3$ أوجد العلاقة بين س ، ص إذا كانت ص = ٣ عندما س = ٢

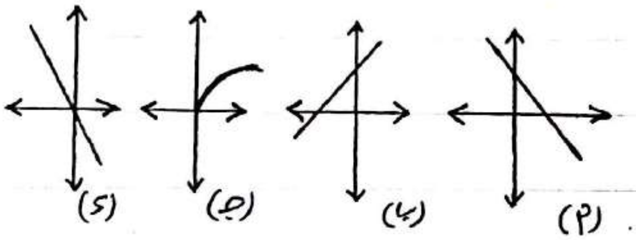
٧ إذا كان $\frac{أ + ب}{3} = \frac{2ب + جـ}{6}$ فأثبت أن $جـ \propto أ$

٨ $س^2 ص^2 - 6 س ص + 9 = 0$ فأثبت أن ص تتغير عكسياً مع س

٩ إذا كان $\frac{21 س - ص}{7 س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فأثبت أن $ص \propto ع$

١٠ إذا كان $س^4 ص^2 - 14 س^2 ص + 49 = 0$ فأثبت أن $ص \propto \frac{1}{س^2}$

١١ وضح أي من الأشكال الآتية تمثل تغير طردي بين س ، ص . . .



١٢ إذا كان $ص \propto س$ فإن $\frac{س_1}{س_2} = \frac{....}{....}$

١٣ إذا كان $ص \propto \frac{1}{س}$ فإن $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{....}{....}$

١٤ إذا كان $ص = \frac{3}{5} س$ فإن $ص \propto$ . . .

١٥ إذا كان $2 س ص = 5$ فإن $س \propto$ . . .

١٦ إذا كانت $ص \propto س$ وكانت ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = . . . عندما س = ١٢

١٧ إذا كان $ص \propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢٠ فإن ص = . . . عندما س = ١٢ .

١ ـ جمع البيانات

جزء نظري شوية معلش

مصادر جمع البيانات

(١) مصادر أوليه (ميدانيه)

هى المصادر التى يبحث منها الباحث على البيانات بشكل مباشر

أمثله • المقابله الشخصيه • استطلاعات الرأى • الملاحظه والقياس

(٢) مصادر ثانويه (تاريخيه)

هى المصادر التى يحصل منها الباحث على البيانات التى تم تجميعها من قبل.

أمثله • نشرات الجهاز المركزى للإحصاء
• قائمة بيانات الموظفين فى الشركات
• وسائل الاعلام ومواقع الانترنت

أساليب جمع البيانات

(١) أسلوب الحصر الشامل

(٢) أسلوب العينات

أنواع العينات

- الاختيار المتحيز
- الاختيار العشوائي
  - عينه عشوائيه بسيطه
  - عينه عشوائيه طبقيه

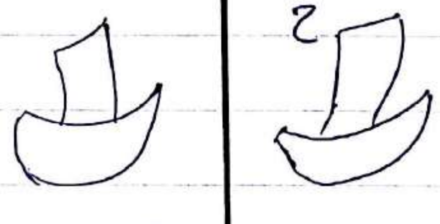
عدد مفردات الطبقه فى العينه

$$= \frac{\text{عدد مفردات الطبقه ككل}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلى}} \times \text{عدد مفردات العينه}$$

استراحه

ا ل

خ د



✓ ✗

استنتج من الصورة

(١) اسم الشخص

(٢) اسم زوجته

(٣) وظيفته

(٤) اسم دولته

٢ ـ التشتت

تذكر أن

(١) الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

(٢) المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) بين القيم.

(٣) الوسيط هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبهم تصاعدياً أو تنازلياً

(٤) التشتت لمجموعة من القيم هو مقياس درجة تباعد هذه القيم وهو يعبر عن مدى تجانس المجموعات.

مقاييس التشتت

(أ) المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

(ب) الانحراف المعياري «ع»

وهو أهم وأدق مقاييس التشتت

أولاً الانحراف المعياري لمجموعة من المفردات

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2}{ن}}$$

حيث

$\bar{س}$ (س بار) هو الوسط الحسابي للمفردات

ن عدد المفردات

مجـ مجموع

مثال (١)

احسب الانحراف المعياري لمجموعة القيم ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ ، ٨

الحل

(١) نوجد الوسط الحسابي ($\bar{س}$)

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} = \frac{٥+٦+٧+٩+٨}{٥} = ٧$$

(٢) نكون الجدول التالي

س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$
٨	٨ – ٧ = ١	١
٩	٩ – ٧ = ٢	٤
٧	٧ – ٧ = ٠	٠
٦	٦ – ٧ = –١	١
٥	٥ – ٧ = –٢	٤
المجموع		١٠

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2}{ن}} = \sqrt{\frac{١٠}{٥}}$$

= ١٫٤١

تمرين (١)

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل من القيم التالية

(١) ١٦ ، ٢٣ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

(٢) ٧٢ ، ٥٣ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٩٦ ، ٥

(٣) ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٦ ، ٩

ثانياً حساب الانحراف المعيارى للتوزيع تكرارى

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مج } (س - \bar{س})^2 \text{ ك}}{\text{مج ك}}}$$

مج ك = مجموع التكرارات

$$\bar{س} = \frac{\text{مج } (س \times ك)}{\text{مج ك}}$$

(١) حساب σ للتوزيع تكرارى بسيط

مثال (٢)

من الجدول التالى أوجد الانحراف المعيارى

العمر	١٥	٢٠	٢٢	٢٣	٢٥	٣٠	المجموع
عدد الأشخاص	٢	٣	٥	٥	١	٤	٢٠

(١) نوجد الوسط الحسابى $\bar{س}$

العمر (س)	ك	س × ك
١٥	٢	٣٠
٢٠	٣	٦٠
٢٢	٥	١١٠
٢٣	٥	١١٥
٢٥	١	٢٥
٣٠	٤	١٢٠
المجموع	٢٠	٤٦٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مج } (س \times ك)}{\text{مج ك}} = \frac{460}{20} = 23 \text{ سنة}$$

(٢)

س	ك	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^2	(س − $\bar{س}$)^2 × ك
١٥	٢	١٥ − ٢٣ = −٨	٦٤	١٢٨
٢٠	٣	−٣	٩	٢٧
٢٢	٥	−١	١	٥
٢٣	٥	٠	٠	٠
٢٥	١	٢	٤	٤
٣٠	٤	٧	٤٩	١٩٦
المجموع	٢٠			٣٦٠

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مج } (س - \bar{س})^2 \times \text{ك}}{\text{مج ك}}} = \sqrt{\frac{360}{20}} = \sqrt{18} \simeq 4,24 \text{ سنة}$$

تمرين (١)

من الجدول التالى أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

عدد أيام الغياب	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الطلاب	٥	٧	٧	٥	٦	٣٠

مثال (٢)

أوجد الانحراف المعيارى للتوزيع ذى المجموعات لعدد ١٠٠ عامل

الحوافز بالجنيه	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-
عدد العمال	١٠	١٤	٢٠	٢٨	٢٠	٨

(١) نوجد الوسط الحسابى $\bar{س}$ من الجدول التالى

المجموعة	مركز المجموعة (س)	ك	س × ك
٣٥-	٤٠	١٠	٤٠٠
٤٥-	٥٠	١٤	٧٠٠
٥٥-	٦٠	٢٠	١٢٠٠
٦٥-	٧٠	٢٨	١٩٦٠
٧٥-	٨٠	٢٠	١٦٠٠
٨٥-	٩٠	٨	٧٢٠
المجموع		١٠٠	٦٥٨٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مج } (س \times ك)}{\text{مج ك}} = \frac{6580}{100} = 65,8 \text{ جنيه}$$

أكمل الجدول التالى

ملاحظات هامة

١) الانحراف المعيارى هو الاكثر تعبيراً عن مقدار تشتت المجموعة واكثرها دقة.

٢) المدى هو ابسط مقاييس التشتت

٣) القيم الاكثر تجانساً تكون أقل تشتتاً ويكون الانحراف المعيارى لها أصغر

٤) إذا كان $\sigma = 0$ فمعنى ذلك أن كل قيم المفردات متساوية وهى حالة التجانس التام (التشتت المنعدم)

الواجب

١ احسب الانحراف المعيارى لكل من

١) ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١

٢) ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ١٨

٣) ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

٢ من كل من الجداول الاتية اوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

١)

عدد الاطفال	٠	١	٢	٣	٤
عدد الاسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

٢)

عدد الوحدات	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد المصانع	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

٣)

المجموعة	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

٣ أكمل

١) من مقاييس التشتت ....، ....

٢) أبسط مقاييس التشتت هو ....

٣) أدق مقاييس التشتت هو ....

٤) الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة ....

٥) لأى مجموعة من القيم إذا تساوت جميع المفردات فإن التشتت يساوى ....

٦) إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة قيم = ٣ فإن مج $(س - \bar{س})^2$ لهذه القيم هو ....

٧) الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى هو ....

٨) الوسط الحسابى للقيم ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ هو ....

٩) القيمة الاكثر تكراراً لمجموعة من البيانات هو ....

١٠) المدى للمجموعة ٢٣ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ هو ....

١١) $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$ = ...

إنتهى المنهج مع أطيب تمنياتى القلبية بالنجاح والتفوق

م/ محمد أدهم

ثانيا

حساب المثلثات و الهندسة

الصف الثالث الإعدادى

الترم الاول

٢٠١٨

إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

ثانياً : حساب المثلثات والهندسة

الوحدة الرابعة (حساب المثلثات)

رقم الصفحة

الوحدة الخامسة (الهندسة التحليلية)

١ – النسب المثلثية الاساسية للزاوية الحادة

خليك فاكر

١) $1^\circ = 60'$ ، $1' = 60''$

$\therefore 1^\circ = 60 \times 60 = 3600''$

يستخدم المفتاح [°'''] لكتابة الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني

٢) مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين $= 90^\circ$

٣) مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين $= 180^\circ$

٤) مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$

مثال (١)

١) إذا كان النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٧ : ٩ فأوجد قياسهما

الحل

نفرض أن قياسي الزاويتين ٧س ، ٩س

$\therefore 7س + 9س = 90^\circ$

$16س = 90^\circ$

$س = \frac{90^\circ}{16} = 5{,}625^\circ$

$\therefore$ قياس الاولى $= 7 \times 5{,}625^\circ = 39^\circ\ 22'\ 30''$

قياس الثانية $= 9 \times 5{,}625^\circ = 50^\circ\ 37'\ 30''$

٢) إذا كان النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٢ : ٣ فأوجد قياس كل منهما

((حل انت))

مثال (٢)

إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٣ : ٥ فأوجد القياس الستيني لكل منهما

الحل

نفرض أن قياسي الزاويتين ٣س ، ٥س

$\therefore 3س + 5س = 180^\circ$

$\therefore 8س = 180^\circ$

$\therefore س = \frac{180^\circ}{8} = 22{,}5^\circ$

$\therefore$ قياس الاولى $= 3 \times 22{,}5^\circ = 67^\circ\ 30'$

قياس الثانية $= 5 \times 22{,}5^\circ = 112^\circ\ 30'$

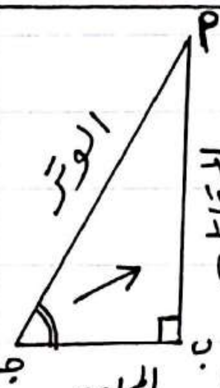
تمرين (٢)

إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستيني لكل منها

الحل

النسبة المثلثية للزاوية الحادة

هي نسبة بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم الذى تقع فيه الزاوية.



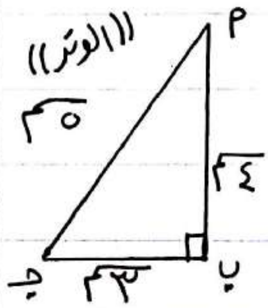
جا ج = المقابل / الوتر (sin)

جتا ج = المجاور / الوتر (cos)

ظا ج = جا ج / جتا ج = المقابل / المجاور (tan)

مثال (١)

من الشكل المقابل أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، ج

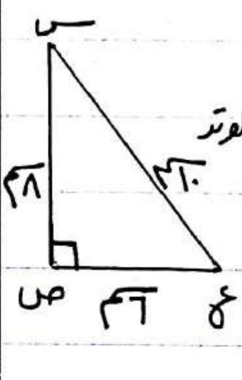


جا أ = $\frac{٣}{٥}$ جا ج = $\frac{٤}{٥}$

جتا أ = $\frac{٤}{٥}$ جتا ج = $\frac{٣}{٥}$

ظا أ = $\frac{٣}{٤}$ ظا ج = $\frac{٤}{٣}$

تمرين



جا س = جا ع =

جتا س = جتا ع =

ظا س = ظا ع =

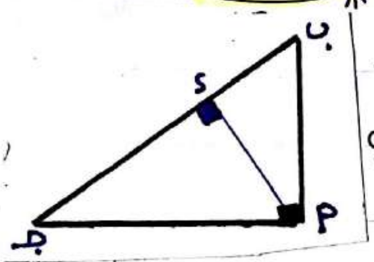
ملاحظات هامة

١) * إذا كان ق (أ) + ق (ج) = ٩٠°
فإن جا أ = جتا ج ، جتا أ = جا ج
والعكس صحيح

٢) * الوتر دائماً ثابت لأنه مقابل للقائمة
لكن المقابل والمجاور يتغير بتغير الزاوية

٣) * نظرية فيثاغورث
(الوتر)^2 = (المقابل)^2 + (المجاور)^2
مربع الوتر = مجموع المربعين الآخرين

٤) * نظرية اقليدس



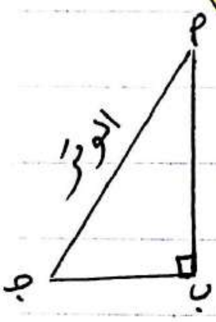
(أب)^2 = ب د × ب ج

(أ ج)^2 = ج د × ج ب

(أ د)^2 = د ب × د ج

أ د × ب ج = أ ب × أ ج

توضيح فيثاغورث



* لو الوتر مطلوب ربع واجمع
* لو الوتر موجود ربع واطرح

(أ ج)^2 = (أ ب)^2 + (ب ج)^2

(أ ب)^2 = (أ ج)^2 - (ب ج)^2

(ب ج)^2 = (أ ج)^2 - (أ ب)^2

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٩٠°

أ جـ = ١٥ سم ، أ ب = ٢٠ سم

اثبت أن جتا جـ جتا ب - جا جـ جا ب = صفر

الحل

من فيثاغورث

∴ (ب جـ)² = (١٥)² + (٢٠)²

(ب جـ)² = ٦٢٥

∴ ب جـ = ٢٥ سم

جا جـ = ٢٠/٢٥   جا ب = ١٥/٢٥

جتا جـ = ١٥/٢٥   جتا ب = ٢٠/٢٥

∴ جتا جـ جتا ب - جا جـ جا ب

١٥/٢٥ × ٢٠/٢٥ - ٢٠/٢٥ × ١٥/٢٥ = صفر

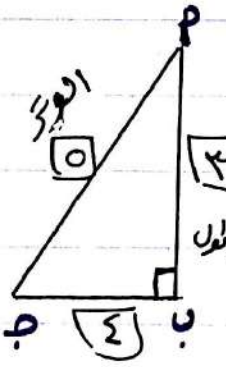
مثال (٣)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان أ ب : أ جـ = ٣ : ٥

فأوجد النسب المثلثية للزاوية أ

الحل



نفرض أن أ ب = ٣ وحدة طول

، أ جـ = ٥ وحدة طول

∴ من فيثاغورث ب جـ = ٤ وحدة طول

جا(أ) =   جا(جـ) =

جتا(أ) =   جتا(جـ) =

ظا(أ) =   ظا(جـ) =

تمرين

من الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث قائم في ب

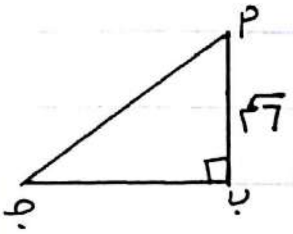
أ ب = ٦ سم

، ظا جـ = ٣/٤ ⇐ (٦/٨)

أوجد

(١) طول ب جـ ، أ جـ

(٢) جا أ + جتا أ



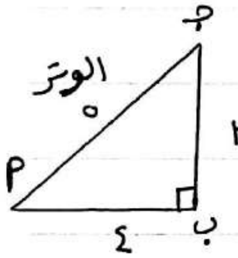
مثال (٤)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

، جا أ = ٠,٦

أوجد قيمة جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

الحل



∵ جا أ = ٦/١٠ = ٣/٥

∴ ب جـ / أ جـ = ٣/٥ ← وحدات

من فيثاغورث

∴ أ ب = ٤ وحدات

∴ جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

= ٣/٥ × ٣/٥ + ٤/٥ × ٤/٥ = ٩/٢٥ + ١٦/٢٥ = ١

إستراحة

قُتلة قتيلة وبعد ألف يوم ظهرت آثار على الجريمة   المطلوب

(١) اسم القاتل   (٢) اسم القتيلة

(٣) مكان الجريمة   (٤) رقم السيارة

الواجب

(١) إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين ٣ : ٤ فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستينى

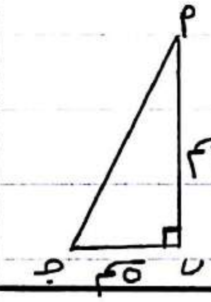
(٢) إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين ٢ : ٥ فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستينى

(٣) إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٢ : ٣ : ٤ فأوجد قياس كل منهما.

(٤) فى الشكل المقابل

أوجد طول $\overline{\text{أجـ}}$

ثم أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، جـ

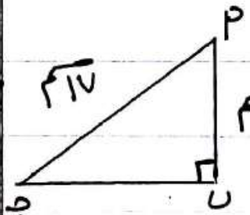


(٥) فى الشكل المقابل

أوجد طول $\overline{\text{بجـ}}$

ثم أوجد قيمة

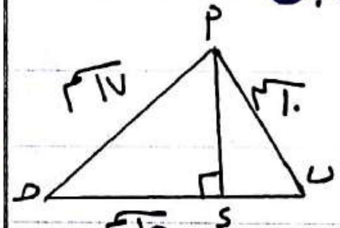
جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ



(٦) فى الشكل المقابل

أوجد قيمة

٣ ظا جـ + جا ب



(فكرة الحل) ← نجيب أد من فيثاغورث ونكمل المثلث الأول ونجيب ب د من فيثاغورث ونكمل المطلوب

(٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كانت أب : أجـ = $\frac{٦}{١٠}$ فأوجد النسب المثلثية للزاوية أ

(٨) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ فأوجد النسب المثلثية للزاوية جـ

(٩) س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ع ، س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم

أوجد قيمة (١) ظا س × ظا ص

(٢) جا² س + جا² ص

(٣) جا² س + جتا² س

(١٠) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ٧ ظا أ − ٢٤ = ٠

فأوجد قيمة ١ − ظا أ جا جـ

(١١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كان ٥ جا أ − ٣ = ٠ فأوجد النسب المثلثية للزاوية جـ ، أ

(١٢) أكمل

(١) جا أ = ... جتا أ = ... ظا أ = ...

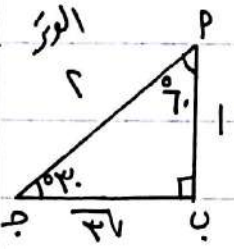
(٢) لأى زاويتين حادتين أ ، ب إذا كان جا أ = جتا ب فإن ق(أ) + ق(ب) = ...

(٣) إذا كان أ ، ب زاويتين حادتين وكان جا ب = جتا أ فإن ق(أ) = ... حيث ق(ب) = ٤٠°

(٤) فى △ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب يكون جا أ + جتا جـ = ... الحل (٢ جا أ ، ٩١ ، ٢ جتا جـ)

٢ - النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

أولاً: النسب المثلثيه للزاويتين (٣٠°، ٦٠°)



$جا ٣٠ = \frac{١}{٢}$ $جا ٦٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$جتا ٣٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $جتا ٦٠ = \frac{١}{٢}$

$ظا ٣٠ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ $ظا ٦٠ = \sqrt{٣}$

احفظ دى

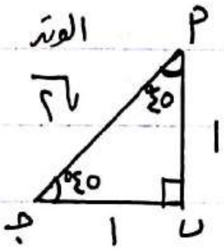
إذا كانت النسبه بين الزاويتين ١ : ٢ فإنهم ٣٠°، ٦٠°

① طول الضلع المقابل للزاويه ٣٠° فى المثلث القائم = $\frac{١}{٢}$ (نصف) طول الوتر

② طول الضلع المقابل للزاويه ٦٠° فى المثلث القائم = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × طول الوتر

③ النسبه بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاويه متساوى الساقين ١ : ١ : $\sqrt{٢}$

ثانياً: النسب المثلثيه للزاويه (٤٥°)



$جا ٤٥ = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Leftarrow \left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

$جتا ٤٥ = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Leftarrow \left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

$ظا ٤٥ = ١$

اكمل

إذا كان جا س = جتا س

فإن س = ٤٥°

النسب المثلثيه \ قياس الزاويه	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا (sin)	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا (cos)	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا (tan)	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

مثال (١)

بدون استخدام الآله أوجد قيمه

① جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا² ٣٠° + ٥ ظا ٤٥° - ١٠ جتا² ٤٥°

الحل

$$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ + ٥ \times ١ - ١٠ \times \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢$$

$$= \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} + ٥ - \frac{١٠}{٢} = ١$$

② جتا ٦٠° + جا ٣٠° - ظا ٤٥°

الحل

③ ٢ جا ٣٠° + ٤ جتا ٦٠° - ظا² ٦٠°

الحل

مثال (٢)

اثبت أن

(١) $حا ٦٠° = ٢ حا ٣٠° جتا ٣٠°$

الحل

الطرف الايمن $= حا ٦٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الطرف الايسر $= ٢ حا ٣٠° جتا ٣٠°$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ الطرفان متساويان

(٢) $جتا ٦٠° = ٢ جتا^٢ ٣٠ - ١$

الحل

مثال (٣)

أوجد قيمة س التى تحقق أن

(١) $س حا ٣٠° جتا^٢ ٤٥° = جتا^٢ ٣٠°$

الحل

$س \times \frac{١}{٢} \times \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢$

$س \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$

$س \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$ ∴ $س = \frac{٣}{٤} \div \frac{١}{٤}$

$س = \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{١} = ٣$

(٢) $س جتا ٣٠° = ظا ٦٠°$

(حل انت)

إيجاد قياس الزاوية إذا علمت احدى نسبها المثلثية

مثال (١)

أوجد قيمة هـ فى كل مما يأتى حيث هـ زاوية حادة

(١) $حا هـ = ٠,٨$

$\boxed{shift}$ $\boxed{sin}$ $\boxed{.}$ $\boxed{8}$ = $\boxed{°'''}$

∴ هـ ≃ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

(٢) $حا هـ = ٠,٦$

(٣) $جتا هـ = ٠,٧١٥٢$

$\boxed{shift}$ $\boxed{cos}$ $\boxed{.}$ $\boxed{7}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ = $\boxed{°'''}$

هـ ≃ ٤٤° ٢٠َ ٢٥ً

(٤) $جتا هـ = ٠,٣٨٢٤$

(٥) $ظا هـ = ١,٥١٥٦$

$\boxed{shift}$ $\boxed{tan}$ $\boxed{1}$ $\boxed{.}$ $\boxed{5}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ = $\boxed{°'''}$

∴ هـ ≃ ٥٦° ٣٤َ ٥٩ً

(٦) $ظا هـ = ١$

الواجب

(١) بدون استخدام الآلة أثبت أن

(١) جتا ٦٠° = ٢ جتا^٢ ٣٠° − ١

(٢) ٢ جتا^٢ ٣٠° − ١ = ١ − ٢ جا^٢ ٣٠°

(٣) جتا ٦٠° = جتا^٢ ٣٠° − جا^٢ ٣٠°

(٤) جتا^٢ ٦٠° = ٥ جا^٢ ٣٠° − ظا^٢ ٤٥°

(٥) ظا ٦٠° = $\frac{\text{٢ ظا } ٣٠^\circ}{\text{١ − ظا}^٢\ ٣٠^\circ}$

(٢) أوجد قيمة س التي تحقق أن

(١) س جا^٢ ٤٥° = ظا^٢ ٦٠°

(٢) س جا ٣٠° جتا^٢ ٤٥° = جا^٢ ٦٠°

(٣) س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٦٠° = ظا^٢ ٤٥° − جتا^٢ ٦٠°

(٤) ٤ س = جتا^٢ ٣٠° ظا^٢ ٣٠° ظا^٢ ٤٥°

(٥) ظا س = ٤ جا ٣٠° جتا ٦٠°

(٦) ٢ جا س = جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا^٢ ٣٠°

(٣) أوجد قيمة هـ حيث هـ زاوية حادة

(١) جا هـ = ٠,٦٥

(٢) جا^٢ ٤٥° = جتا هـ ظا ٣٠°

(٣) جا هـ جا^٢ ٦٠° = ٣ جا^٢ ٤٥° جتا^٢ ٤٥° جتا ٦٠°

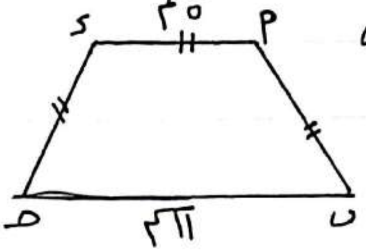
(٤) ٣ ظا هـ − ٤ جا^٢ ٣٠° = ٨ جتا^٢ ٦٠°

(٥) جا هـ = جتا ٦٠°

(٤) إذا كان ظا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ حيث س حادة

فأوجد قيمة جا س ظا$\left(\frac{٣س}{٢}\right)$ + جتا(٢س)

(٥) في الشكل المقابل



أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين

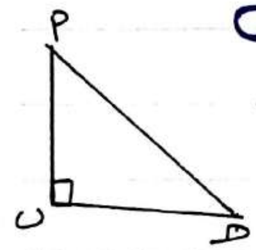
ب أ = أ د = د جـ = ٥ سم

، ب جـ = ١١ سم

أوجد (١) ق(ب̂) ، ق(أ̂)

(٢) مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د

(٦) في الشكل المقابل



ق(أ̂) = ٢ ق(جـ̂)

أوجد قيمة المقدار

جتا^٢ أ + ظا^٢ جـ

(٧) كسرت الرياح الجزء العلوي من شجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠° ، إذا كانت نقطة تلاقي قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة مسافة ٤ أمتار أوجد طول الشجرة لأقرب متر.

(٨) أكمل

(١) جا ٤٥° − جتا ٤٥° = ...

(٢) جتا ٦٠° + جا ٣٠° = ...

(٣) جا ٣٠° + جتا ٦٠° − ظا ٤٥° = ...

(٤) ٤ جتا ٣٠° × ظا ٦٠° = ...

(٥) ظا ٤٥° × جا ٣٠° = ...

(٦) كم عدد محافظات جمهورية مصر العربية

١ - البعد بين نقطتين

ملاحظات هامة جداً

١ البعد بين نقطتين (س١، ص١)، (س٢، ص٢)

$= \sqrt{\text{مربع فرق السينات} + \text{مربع فرق الصادات}}$

$= \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

٢ بعد نقطة عن محور السينات = |ص|

بعد النقطة عن محور الصادات = |س|

٣ لإثبات أن ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة نحسب البعد بين كل نقطتين ثم نثبت أن أكبر بعد = مجموع البعدين الآخرين

٤ فى أى مثلث أ ب جـ لتحديد نوع المثلث نوجد أ ب ، ب جـ ، أ جـ

أ) $(أجـ)^2 > (أب)^2 + (ب جـ)^2$ منفرج فى ب

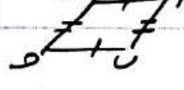
ب) $(أجـ)^2 = (أب)^2 + (ب جـ)^2$ قائم فى ب

جـ) $(أجـ)^2 < (أب)^2 + (ب جـ)^2$ حاد الزوايا

٥ إذا كان أ ب جـ د شكل رباعى

أ) لإثبات أن الشكل متوازى أضلاع

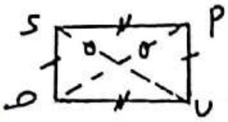
أ ب = جـ د ، أ د = ب جـ



ب) لإثبات أن الشكل مستطيل

أ ب = د جـ ، أ د = ب جـ

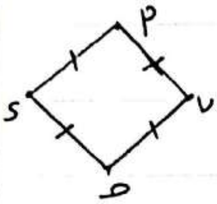
أ جـ = ب د (القطران)



جـ) لإثبات أنه شكل معين

أ ب = ب جـ = جـ د = د أ

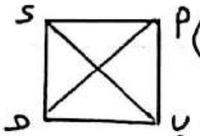
(الأضلاع الأربعة متساوية)



د) لإثبات أنه الشكل مربع

أ ب = ب جـ = جـ د = د أ (الأضلاع =)

، أ جـ = ب د (القطران =)



٦ لإثبات أن ثلاث نقط أ ، ب ، جـ تقع على محيط دائرة مركزها م

نثبت م أ = م ب = م جـ (نق)

* محيط الدائرة = ٢ π نق

* مساحة الدائرة = π نق²

٧ بعد النقطة م (س، ص) عن نقطة الأصل

$= \sqrt{س^2 + ص^2}$

عن محور السينات = القيمة المطلقة لـ ص

عن محور الصادات = القيمة المطلقة لـ س

٨ * محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

* مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

أو $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب الضلعين المتعامدين

مثال (١)

إذا كان أ(٢، ٥) ، ب(-١، ١)

فأوجد طول $\overline{\text{أب}}$ (البعد بينهما)

الحل

أ(٢، ٥) (س_1، ص_1) ب(-١، ١) (س_2، ص_2)

$$\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-١-٢)^2 + (١-٥)^2} = \sqrt{(-٣)^2 + (-٤)^2}$$

$$= \sqrt{٩+١٦} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

تمرين (١)

إذا كان أ(١، ٢) ، ب(٤، ٦)

فأوجد طول $\overline{\text{أب}}$

الحل

مثال (٢)

إذا كان البعد بين (أ، ٠) ، (٠، ١) هو وحدة طول واحدة

فأوجد قيمة أ

الحل

(أ، ٠) (س_1، ص_1) ، (٠، ١) (س_2، ص_2)

$$\because \sqrt{(\text{أ}-٠)^2 + (٠-١)^2} = ١$$

$$\therefore \sqrt{\text{أ}^2 + ١} = ١ \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$\text{أ}^2 + ١ = ١ \qquad \text{أ}^2 = ١ - ١ = ٠ \qquad \therefore \boxed{\text{أ} = ٠}$$

تمرين (٢)

إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧) ، (-٢، ٣) = ٥ فأوجد قيمة أ

الحل

مثال (٣)

أثبت أن النقاط أ(-٢، ٧) ، ب(-٣، ٤)

، جـ(١، ١٦) تقع على استقامة واحدة

الحل

$$\text{أب} = \sqrt{(-٣+٢)^2 + (٤-٧)^2} = \sqrt{١+٩} = \sqrt{١٠} \text{ وحدة طول}$$

$$\text{ب جـ} = \sqrt{(١+٣)^2 + (١٦-٤)^2} = \sqrt{١٦+١٤٤} = ٤\sqrt{١٠} \text{ وحدة}$$

$$\text{أجـ} = \sqrt{(١+٢)^2 + (١٦-٧)^2} = \sqrt{٩+٨١} = ٣\sqrt{١٠} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore \text{ب جـ} = ٤\sqrt{١٠}$$

$$، \text{أب} + \text{أجـ} = \sqrt{١٠} + ٣\sqrt{١٠} = ٤\sqrt{١٠}$$

$$\therefore \text{ب جـ} = \text{أب} + \text{أجـ}$$

∴ أ، ب، جـ تقع على استقامة واحدة

تمرين (٣)

أثبت أن النقط أ(٤، ٣) ، ب(١، ١)

، جـ(-٥، -٣) تقع على استقامة واحدة

الحل

مثال (٤)

أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط أ(٥، -٥) ، ب(-١، ٧) ، جـ(١٥، ١٥) قائم الزاوية فى ب ثم اوجد مساحته

الحل

أب = $\sqrt{(-1-5)^2+(7+5)^2} = \sqrt{36+144}$

$= \sqrt{180}$ وحدة طول

، بجـ = $\sqrt{(15+1)^2+(15-7)^2}$

$= \sqrt{256+64} = \sqrt{320}$ وحدة طول

، أجـ = $\sqrt{(15-5)^2+(15+5)^2}$

$= \sqrt{100+400} = \sqrt{500}$ وحدة طول

$(أب)^2 = 180$ ، $(بجـ)^2 = 320$ ، $(أجـ)^2 = 500$

∴ $(أجـ)^2 = (أب)^2 + (بجـ)^2$

∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب

مساحة Δ أبجـ = $\frac{1}{2}$ أب × بجـ

$= \frac{1}{2}\sqrt{180} \times \sqrt{320} = 120$ وحدة مربعة

تمرين (٤)

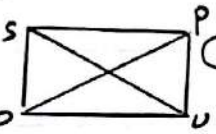
اثبت أن المثلث الذى رؤوسه أ(٣، ٢) ، ب(-٤، ١) ، جـ(٢، -١) قائم الزاوية وأوجد مساحته

الحل

مثال (٥)

أثبت أن النقط أ(٠، ١) ، ب(٤، ٥) ، جـ(١، ٨) ، د(-٣، ٤) هى رؤوس لمستطيل ثم احسب طول قطره

الحل



أب = $\sqrt{(4-0)^2+(5-1)^2}$

$= \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ وحدة طول

، بجـ = $\sqrt{(1-4)^2+(8-5)^2}$

$= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ وحدة طول

، جـد = $\sqrt{(-3-1)^2+(4-8)^2}$

$= \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ وحدة طول

، أد = $\sqrt{(0+3)^2+(1-4)^2}$

$= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ وحدة طول

، أجـ = $\sqrt{(1-0)^2+(8-1)^2}$

$= \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$ وحدة طول

، بد = $\sqrt{(4+3)^2+(5-4)^2}$

$= \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$ وحدة طول

، ∵ أب = جـد ، بجـ = أد ، أجـ = بد

∴ الشكل أبجـد مستطيل

وطول قطره = $5\sqrt{2}$ وحدة طول

تمرين (٥)

اثبت أن النقط أ(-٦، ٢) ، ب(٠، ٨) تقع على دائرة مركزها م(-٤، ٦) ثم أوجد محيطها ومساحتها $\pi = 3.14$

الواجب

١ أوجد طول أب في الحالات الآتية

① أ(١، ٢) ، ب(٤، ٦)

② أ(-٢، ٧) ، ب(٣، -٥)

③ أ(١٥، ٠) ، ب(٦، ٠)

④ أ(٢، -٣) ، ب(-١، ١)

٢ بين أي من النقط التالية تقع على استقامة واحدة

① أ(٤، ٣) ، ب(١، ١) ، جـ(-٥، -٣)

② أ(١، ٤) ، ب(٣، -٢) ، جـ(-٣، ١٦)

③ أ(٧، ٠) ، ب(-٣، ٦) ، جـ(٢٢، ٩)

٣ أثبت أن

① المثلث الذي رؤوسه أ(-١، -١) ، ب(٢، ٣) ، جـ(٦، ٠) قائم الزاوية

② المثلث الذي رؤوسه أ(٥، ٠) ، ب(٧، ٢$\sqrt{٣}$) ، جـ(٣، ٢$\sqrt{٣}$) متساوي الأضلاع ثم أوجد محيطه.

③ الشكل أ(-١، ١) ، ب(٠، ٥) ، جـ(٥، ٦) ، د(٤، ٢) متوازي أضلاع

④ الشكل أ(٣، ٣) ، ب(٠، ٣) ، جـ(٠، ٠) ، د(٣، ٠) هو مربع ثم احسب طول قطره ومساحته

⑤ النقط أ(٣، -١) ، ب(-٤، ٦) ، جـ(٢، -٢) تقع على محيط دائرة م(-١، ٢) ثم احسب محيط الدائرة ومساحتها (π = ٣٫١٤)

٤ إذا كان البعد بين أ(٢، س) ، ب(٣، -١) = $\sqrt{١٧}$ فأوجد قيمة س

٥ إذا كان أ(س، ٣) ، ب(٣، ٢) ، جـ(٥، ١) وكانت أب = ب جـ فأوجد قيمة س

٦ أكمل

① البعد بين أ(٦، ٠) ، ب(٠، ٨) = ----

② طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (٧، ٤) وتمر بالنقطة (٣، ١) = ----

③ إذا كان أ ب جـ د مربع وكان أ(٣، ٥) ، ب(٤، ٢) فإن مساحته = ---- وحدة مربعة

④ بعد النقطة (-٣، ٤) عن نقطة الأصل = ----
وعن محور السينات = ----
وعن محور الصادات = ----

⑤ بعد النقطة (-٦، -٨) عن نقطة الأصل = ----
وعن محور السينات = ---- وعن محور الصادات = ----

⑥ طول قطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣، -٤) = ----

٢ ـ إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

ملاحظات زى كل مرة

١ إذا كان أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)

فإن منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{س١+س٢}{٢} ، \frac{ص١+ص٢}{٢}\right)$

٢ إذا كان المطلوب نقطة على الطرف وليس المنتصف نفرضها (س ، ص) ثم نكون معادلتين ونحلهم كما سنرى بعد شوية حلوة بعد شوية دي؟

٣ (أ ، ب) = (جـ ، د)

∴ أ = جـ ، ب = د

٤ إذا كان $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م فإن مركز الدائرة هو منتصف $\overline{أب}$

مثال (١)

أوجد منتصف $\overline{أب}$ فى كل مما يلى

١ أ (١ ، ٥) ، ب (٣ ، ١)

م = $\left(\frac{١+٣}{٢} ، \frac{٥+١}{٢}\right)$ = (٢ ، ٣)

٢ أ (٣ ، -٢) ، ب (٥ ، ٢)

م = (،) = (،)

٣ أ (-١ ، ٢) ، ب (٥ ، -٤)

مثال (٢)

إذا كانت جـ (١٠ ، -٤) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٤ ، -٢) فأوجد ب

الحل

أ (٤ ، -٢) م (١٠ ، -٤) ب (س ، ص)

(١٠ ، -٤) = $\left(\frac{٤+س}{٢} ، \frac{-٢+ص}{٢}\right)$

∴ $\frac{٤+س}{٢}$ = ١٠ ٤ + س = ٢٠

∴ س = ٢٠ - ٤ = ١٦

، $\frac{-٢+ص}{٢}$ = -٤ -٢ + ص = -٨

ص = -٨ + ٢ = -٦

∴ ب (١٦ ، -٦)

تمرين (٢)

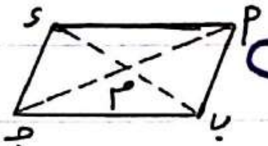
إذا كان جـ (٢ ، ٥) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (-٢ ، -٣) فأوجد احداثيات ب

الحل

مثال (٣)

أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ(٣، ٢) ، ب(٤، -٥) ، جـ(٠، -٣)
فأوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد إحداثيي نقطة د

الحل



١) إحداثيي نقطة تقاطع قطريه

(منتصف $\overline{أجـ}$ أو $\overline{بد}$)

$م = \left(\frac{٣+٠}{٢} ، \frac{٢-٣}{٢}\right) = \left(١\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right)$

∴ نقطة تقاطع قطراه هي $\left(١\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right)$ أولاً

بفرض أن د(س ، ص)

∵ م منتصف $\overline{بد}$

∴ $\left(١\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right) = \left(\frac{س+٤}{٢} ، \frac{ص-٥}{٢}\right)$

∴ $\frac{س+٤}{٢} = ١\frac{١}{٢} \Leftarrow$ ∴ س + ٤ = ٣

∴ س = ٣ - ٤ = -١

، $\frac{ص-٥}{٢} = -\frac{١}{٢} \Leftarrow$ ص - ٥ = -١

ص = -١ + ٥ = ٤

∴ د (-١، ٤) ثانياً

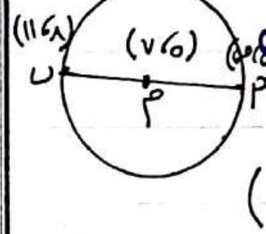
مثال (٤)

إذا كان أب قطراً في دائرة مركزها م فإذا كان ب(٨، ١١) ، م (٥، ٧) فأوجد

① إحداثيي أ

② محيط الدائرة حيث π = ٣,١٤

الحل



بفرض أن أ(س ، ص)

∴ $(٥، ٧) = \left(\frac{س+٨}{٢} ، \frac{ص+١١}{٢}\right)$

∴ $\frac{س+٨}{٢} = ٥ \Leftarrow$ س + ٨ = ١٠

س = ١٠ - ٨ $\Leftarrow$ ∴ س = ٢

، ∴ $\frac{ص+١١}{٢} = ٧ \Leftarrow$ ص + ١١ = ١٤

ص = ١٤ - ١١ $\Leftarrow$ ∴ ص = ٣

∴ أ (٢، ٣)

محيط الدائرة = π × طول القطر $\boxed{أو}$ ٢ π نق

نق = م ب = $\sqrt{(٨-٥)^٢ + (١١-٧)^٢}$

= $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ٥

= ٣١,٤ وحدة طول

تمرين (٣)

إذا كان $\overline{أب}$ قطراً في الدائرة م

حيث أ(٤، -١) ، ب(-٢، ٧)

فأوجد إحداثيي م ثم أوجد محيط ومساحة

الدائرة .

الواجب

١) أوجد احداثيات منتصف $\overline{أب}$

① أ(٣، ٥) ، ب(٧، ١)

② أ(٢، ٤) ، ب(٦، ٠)

③ أ(٧، -٦) ، ب(-١، ٠)

④ أ(٥، -٣) ، ب(-١، ٣)

٢) إذا كان

① ج(٤، ٦) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(س، ٣) ، ب(٦، ص) فأوجد قيمة س ، ص

② ج(٢، -٦) منتصف $\overline{أب}$ ، أ(س، ٤) ، ب(-٢، ص) فأوجد س ، ص

③ ج(١، ٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٣، ٧) فأوجد احداثيي ب

④ م(٢، ١) مركز الدائرة التى $\overline{أب}$ قطر فيها وكان أ(٠، ٤) فأوجد ب

⑤ (٢أ-٣ ، أ-ب) منتصف القطعة التى طرفاها (٧، -١) ، (٣، ٧) فأوجد قيمتى أ ، ب

٣) أثبت أن

أ(٣، -٢) ، ب(-٥، ٠) ، ج(٠، -٧) ، د(٨، -٩) هى رؤوس متوازى أضلاع ← ارشاد اثبت أن منتصف $\overline{أج}$ هو نفسه $\overline{بد}$

٤) أثبت أن أ(-٣، ٠) ، ب(٣، ٤) ، ج(١، -٦) هى رؤوس مثلث متساوى الساقين رأسه أ ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ عمودية على $\overline{بج}$

٥) أثبت أن أ(٦، ٠) ، ب(٢، -٤) ، ج(-٤، ٢) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب ثم أوجد إحداثيى نقطة د التى تجعل الشكل أ ب ج د مستطيل.

٦) أكمل

① منتصف (٥، ٢) ، (-١، -٤) هو ----

② منتصف (٣، ١) ، (-١، -٥) هو ----

③ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة حيث أ(-١، ٤) ، ب(٧، ٦) فإن مركز الدائرة = ----

④ إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٥، -٢) فإن ب = ----

⑤ إذا كان أ(٣، ص) ، ب(٥، -٢) ، ج منتصف $\overline{أب}$ حيث ج(س، ٢) فإن س = ---- ، ص = ----

كفاية عليكوا كده؟

٣ – ميل الخط المستقيم

خلى بالك

١ ميل المستقيم المار بالنقطتين

(س١، ص١) ، (س٢، ص٢)

$= \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

مثال (١)

أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط التالية

١ ا(٢، ٠) ، ب(٧، ٥)

الحل

س١ = ٢ ص١ = ٠ س٢ = ٧ ص٢ = ٥

الميل $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٠}{٧ - ٢}$

$= \frac{٥}{٥} = ١$

٢ (٤، ٢) ، (٥، ٦)

الحل

خلى بالك تانى

١ ميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية التى يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٢ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = صفر

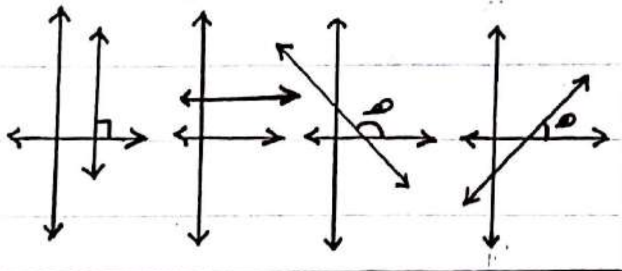
$\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} =$ البسط = صفر

٣ ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف

يعنى $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ المقام = ٠

٤ العلاقة بين الميل والزاوية

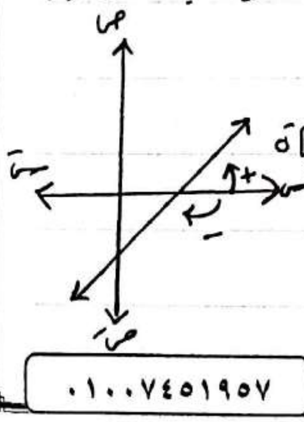
حادة منفرجة صفرية تامة



القياس الموجب والسالب

* القياس الموجب فى عكس اتجاه عقارب الساعة

* القياس السالب فى اتجاه عقارب الساعة



مثال (١)

أوجد ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

① ٤٥°

م = ظا ٤٥° = ١

② ١٢٤° ١٥َ ١٢ً

م = ظا ١٢٤° ١٥َ ١٢ً = −١٫٤٦٨٥

③ ٣٠°

④ ٦٠°

⑤ ٩٠° (عمودى على محور السينات)

موازى لمحور الصادات

الميل غير معرف

⑥ صفر

مثال (٢)

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان

① م = ١٫٤٨٦

∵ م = ظا هـ ∴ ظا هـ = ١٫٤٨٦

∴ هـ = ٥٦° ٣َ ٤١ً

② $\sqrt{٣}$

مثال (٣)

أوجد قياس الزاوية (هـ) التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان يمر بالنقطتين

① (−٢ ، $\sqrt{٣}$) ، (١ ، ٤$\sqrt{٣}$)

الحل

ميل ل = $\frac{٤\sqrt{٣} - \sqrt{٣}}{١ + ٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$

م = $\sqrt{٣}$ الميل موجب ∴ الزاوية حادة

∴ ظا هـ = $\sqrt{٣}$

∴ هـ = ٦٠°

② (−٢ ، ٣) ، (−٣ ، ٤)

الحل

ميل ل = $\frac{٤ - ٣}{−٣ + ٢} = \frac{١}{−١} = −١$

الميل سالب ∴ الزاوية منفرجة

ظا هـ = −١

∴ هـ = ١٣٥° (١٨٠° − ٤٥°)

③ (−٤ ، −١) ، (٥ ، −٣)

الحل

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

١) إذا توازى مستقيمان فإن ميلاهما يكونان متساويان

ل١ // ل٢ ∴ م١ = م٢

٢) إذا تساوى ميلا مستقيمان فإن المستقيمان يكونان متوازيان

م١ = م٢ ∴ ل١ // ل٢

٣) لإثبات أن أ، ب، جـ على استقامة واحدة فلابد أن يكون

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$

مثال (١)

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣) ، (-١،٦) يوازى المستقيم الذى يصنع ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

م١ = $\frac{٦ - ٣}{-١ - ٢} = \frac{٣}{-٣} = -١$

م٢ = ظا ١٣٥ = -١

∴ م١ = م٢ ∴ ل١ // ل٢

تمرين (١)

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (١،٥) ، (-٢،-١) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٠،-١) ، (٥،٩)

الحل

مثال (٣)

اثبت أن النقط أ(١،١) ، ب(٢،٣) ، جـ(٠،-١) تقع على استقامة واحدة

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣ - ١}{٢ - ١} = \frac{٢}{١} = ٢$

، ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = $\frac{-١ - ٣}{٠ - ٢} = \frac{-٤}{-٢} = ٢$

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ لهما نفس الميل ومشتركين فى النقطة ب

∴ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

تمرين (٣)

اثبت أن النقط أ(-١،٦) ، ب(٣،-٤) ، جـ(٢، -١٫٥) تقع على استقامة واحدة

((حل انت))

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

① إذا كان $ل_١ \perp ل_٢$ فإن $م_١ \times م_٢ = -١$

② إذا كان $م_١ \times م_٢ = -١$ فإن $ل_١ \perp ل_٢$

⇓

إذا كان المستقيمان متعامدان فإن حاصل ضرب ميلاهما = -١ "والعكس صحيح"

③ في المثلث القائم ضلعى القائمة يكونان متعامدان (حاصل ضرب ميلاهما = -١)

مثال (١)

اثبت أن المستقيم ل١ المار بالنقطتين (-١، ٤)، (٣، ٧) يكون عمودياً على المستقيم ل٢ المار (١، ١)، (٤، -٣)

الحل

ميل $ل_١ = \frac{٧ - ٤}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$

، ميل $ل_٢ = \frac{-٣ - ١}{٤ - ١} = \frac{-٤}{٣}$

$\because م_١ \times م_٢ = \frac{٣}{٤} \times \frac{-٤}{٣} = -١$

$\therefore ل_١ \perp ل_٢$ #

ملحوظة عشان نجيب ميل العمود

بنقلب الكسر ونغير إشارة واحدة:

$\frac{٢}{٣} \perp \frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٦} \perp \frac{-٦}{٥}$

$٤ \perp \frac{-١}{٤}$ وهكذا.

تمرين (١)

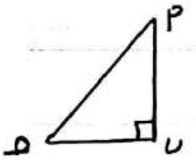
اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٣√٣)، (٥، ٢√٣) عمودي على المستقيم الذي يصنع ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

مثال (٢)

إذا كانت أ(١، ٧)، ب(٢، ٤)، د(٥، ص) تمثل رؤوس مثلث قائم في ب فأوجد قيمة ص

الحل



$م_١$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٤ - ٧}{٢ - ١} = -٣$

$م_٢$ ميل $\overleftrightarrow{بد} = \frac{ص - ٤}{٥ - ٢} = \frac{ص - ٤}{٣}$

$\because \overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{بد}$

$\therefore م_١ \times م_٢ = -١$

$\therefore -٣ \times \frac{ص - ٤}{٣} = -١$

$-ص + ٤ = -١$

$-ص = -١ - ٤$ ، $-ص = -٥$

$\therefore ص = ٥$

ملاحظات لحل مسائل الأشكال الرباعية باستخدام الميل

١ لإثبات أن الشكل شبه منحرف

نثبت أن ضلعان متقابلان متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيان

٢ لإثبات أن الشكل متوازي أضلاع نثبت واحدة فقط مما يلي

١ كل ضلعين متقابلين متوازيين
٢ كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول
٣ ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان.
٤ القطران ينصف كل منهما الآخر.

بعد إثبات أن الشكل متوازي أضلاع أولاً

أ مستطيل (واحدة فقط)
١ ضلعان متجاوران متعامدان أو
٢ القطران متساويان في الطول

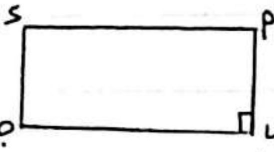
ب معين (واحدة فقط)
١ القطران متعامدان أو
٢ ضلعان متجاوران متساويان في الطول

جـ مربع (واحدة فقط)
١ ضلعان متجاوران متعامدان ومتساويان
٢ القطران متساويان في الطول ومتعامدان
٣ ضلعان متجاوران متعامدان والقطران متعامدان
٤ ضلعان متجاوران متساويان والقطران متساويان

مثال (١)

باستخدام الميل اثبت أن النقاط أ(-١،٣) ، ب(٥،١) ، جـ(٦،٤) ، د(٠،٦) رؤوس مستطيل

الحل



ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١-٣}{٥+١} = -\frac{١}{٣}$

ميل $\overleftrightarrow{دجـ} = \frac{٤-٦}{٦-٠} = \frac{-٢}{٦} = -\frac{١}{٣}$

∴ $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{دجـ}$ ⟸ (١)

ميل $\overleftrightarrow{أد} = \frac{٦-٣}{٠+١} = \frac{٣}{١} = ٣$

ميل $\overleftrightarrow{بجـ} = \frac{٤-١}{٦-٥} = \frac{٣}{١} = ٣$

∴ $\overleftrightarrow{أد} \parallel \overleftrightarrow{بجـ}$ ⟸ (٢)

∴ من (١) ، (٢)

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب} = -\frac{١}{٣}$ ، ميل $\overleftrightarrow{بجـ} = ٣$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بجـ} = -\frac{١}{٣} \times ٣ = -١$

∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{بجـ}$

∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل

تمرين (١)

أ ب جـ د معين فيه أ(٣،٢) ، ب(٤، ك) ، د(-١،-٢)

أوجد

١ قيمة ك

٢ طول $\overline{بد}$

الواجب

١ أوجد ميل المستقيم المار بكل من

① (١، ٢) ، (٣، ٦)
② (٠، ٥) ، (-٣، ٤)
③ (-٢، ١) ، (٢، ١)
④ (٣، ٢) ، (٣، -١)

٢ أوجد ميل المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

① ٣٠° ② صفر°
③ ٨٦° ٤٢َ ٢٢ ④ ٩٠°
⑤ ٦٠° ⑥ ٤٥°

٣ اثبت أن النقط أ(١، ١)، ب(٢، ٣)، جـ(٠، -١) تقع على استقامة واحدة

٤ اثبت أن المستقيم المار (٢، ٤)، (٥، ٦) يوازي المستقيم المار بـ (٠، ٥)، (-١، ١)

٥ اثبت أن المستقيم المار بـ (-٣، ٤)، (-٣، -٢) عمودي على المستقيم المار (١، ٢)، (-٣، ٢)

٦ أوجد ميل المستقيم الموازي والعمودي للمستقيم المار (٢، -٣)، (٣، ٥)

٧ اثبت أن المستقيم المار (٢، -١)، (٦، ٣) يوازي المستقيم الذي يصنع ٤٥° مع +محور س

٨ إذا كان المثلث أ(٣، -١)، ب(س، ٣)، جـ(٥، ٣) قائم الزاوية في أ فأوجد قيمة س

٩ إذا كان المستقيم أب // محور الصادات حيث أ(س، ٧)، ب(٣، ٥) فأوجد قيمة س ⟸ (انتبه) الميل غير معرف = عدد/صفر

١٠ إذا كان المستقيم جـ د // محور السينات حيث جـ(٤، ٢)، د(-٥، ص) فأوجد قيمة ص ⟸ الميل = صفر = صفر/عدد

١١ إذا كانت النقط (٠، ١)، (أ، ٣)، (٢، ٥) على استقامة واحدة فأوجد «أ»

١٢ إذا كانت أ(-١، -١)، ب(٢، ٣)، جـ(٦، ٠) فاثبت أن المثلث قائم الزاوية في ب

١٣ أثبت أن النقط أ(-١، ١)، ب(٠، ٥)، جـ(٤، ٢)، د(٥، ٦) هي رؤوس متوازي أضلاع أ ب جـ د

١٤ أثبت أن النقط أ(١، ٣)، ب(٦، ٤)، جـ(٧، ٩)، د(٢، ٨) هي رؤوس المعين أ ب جـ د

١٥ أثبت أن النقط أ(-١، -١)، ب(٢، ٣)، جـ(٦، ٠)، د(٣، -٤) هي رؤوس مربع

١٦ أكمل

① ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = ----
② ميل " " " " الصادات = ---
③ إذا كان أب // جـ د ، ميل أب = ٢/٣ فإن ميل جـ د = --- ، ميل العمودي عليه = ---

٤ ــ معادلة الخط المستقيم

الحالة الاولى

المستقيم على صورة $\boxed{ص = م س + جـ}$

خاصية

م ⟸ الميل

جـ ⟸ هو الجزء المقطوع من محور الصادات

والمستقيم يمر بالنقطة (٠ ، جـ) يقطع محور الصادات

أمثلة

(١) المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٧

ميله = $\frac{١}{٢}$

ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات

٧ وحدات

ويمر بالنقطة (٠ ، ٧)

(٢) المستقيم ص = −٢ س − ٣

ميله = −٢

ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات

٣ وحدات

ويمر بالنقطة (٠ ، −٣)

(٣) المستقيم ص = س − ٢

ميله = ١ «أكمل»

الحالة الثانية

الصورة $\boxed{أ س + ب ص + جـ = ٠}$

خاصية

الميل = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left|\frac{-جـ}{ب}\right|$

ويقطع محور الصادات فى (٠ ، $\frac{-جـ}{ب}$)

أمثلة

(١) المستقيم $\overset{أ}{س} - \overset{ب}{٢}ص + \overset{جـ}{٣} = ٠$

ميله = $\frac{-١}{-٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ويقطع محور الصادات فى (٠ ، $\frac{٣}{٢}$)

أى أنه يقطع من الاتجاه الموجب لمحور الصادات

$\frac{٣}{٢}$ وحدة

(٢) إذا كان المستقيم ٣ص + س − ٧ = ٠

، ص = ك س + ٥ متعامدان

فأوجد قيمة ك

الحل

$م_١ = \frac{-١}{٣}$ ، $م_٢ = ك$

∵ $ل_١ \perp ل_٢$ ∴ $م_١ \times م_٢ = -١$

∴ $\frac{-١}{٣} \times ك = -١$

$-ك = -٣$ ∴ $ك = ٣$

٣ أوجد ميل المستقيم

٢ص = ٣ س + ١٢ وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

الحل

٢ص = ٣ س + ١٢ (÷ ٢)

ص = $\frac{٣}{٢}$ س + ٦

الميل = $\frac{٣}{٢}$

ويقطع ٦ وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات

٤ أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم

٣ س - ٣ص + ٥ = ٠ مع محور السينات

الحل

٥ أوجد الميل والجزء المقطوع لمحور الصادات للمستقيم $\frac{س}{٢}$ + $\frac{ص}{٣}$ = ١

الحل

$\frac{س}{٢}$ + $\frac{ص}{٣}$ = ١ (بالضرب × ٦)

٣ س + ٢ص = ٦

٢ص = - ٣ س + ٦ (÷ ٢)

ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + ٣

∴ الميل = $\frac{-٣}{٢}$ والمستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات

ملاحظات هامة

لإيجاد معادلة المستقيم الذى ميله م ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات جـ أو يقطع محور الصادات فى (٠، جـ)

هى

⇐ $\boxed{\text{ص = م س + جـ}}$

حالات خاصة

١ معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل و(٠، ٠) هى ص = م س

٢ معادلة محور السينات هى ص = ٠

٣ معادلة محور الصادات هى س = ٠

٤ معادلة الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (س١، ص١) هى ص = الاحداثى الصادى

٥ معادلة الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة (س١، ص١) هى س = الاحداثى السينى

اكمل

١ معادلة المستقيم الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (٣، -٢) هى ص = -٢

٢ معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة (-٣، ٥) هى س = -٣

٣ معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل وميله = ٢ هى ص = ٢ س

مثال (١)

اكتب معادلة المستقيم الذى

(١) ميله = $-\frac{٣}{٤}$ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات

الحل

م = $-\frac{٣}{٤}$ ، جـ = ٣

∴ المعادلة هي ص = م س + جـ

∴ ص = $-\frac{٣}{٤}$ س + ٣

(٢) ميله = ٢ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٥ وحدات طول

الحل

ص = م س + جـ

ص = ٢ س + (-٥)

ص = ٢ س - ٥

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١، -١) ، (٢، ٢)

الحل

ص = م س + جـ

م = $\frac{٢ + ١}{٢ - ١}$ = $\frac{٣}{١}$ = ٣

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١، -١)

س = ١ ، ص = -١

-١ = ٣ + جـ

∴ جـ = -١ - ٣ = -٤

∴ معادلة المستقيم هي ص = ٣ س - ٤

تمرين (١)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٢) ، (٣، ٤)

الحل

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٢) وموازيًا للمستقيم ٢ س + ٣ ص - ٦ = ٠

الحل

ميل المستقيم المعطى = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{٣}$

∴ ميل المطلوب = $\frac{-٢}{٣}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + جـ

∵ (١، ٢) تنتمى للمستقيم

∴ ٢ = $\frac{-٢}{٣}$ + جـ

∴ جـ = ٢ + $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٨}{٣}$

تكون المعادلة هي ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + $\frac{٨}{٣}$

تمرين (٢)

اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، ٣) وعموديًا على المستقيم المار بالنقطتين أ (٣، -٤) ، ب (٥، -٣)

مثال (٣)

إذا كان المستقيم ل: ٢س - ٣ص - ٦ = ٠ يقطع محور السينات عند أ ومحور الصادات عند ب فأوجد

(١) إحداثي النقطتين أ، ب

(٢) معادلة المستقيم المار بمنتصف $\overline{أب}$ ويوازي محور الصادات

الحل

(١) نفرض أن أ (س، ٠)

∴ عندما ص = ٠ ∴ ٢س - ٣ × ٠ - ٦ = ٠

∴ ٢س = ٦ س = ٣

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات أ (٣، ٠)

، نفرض أن ب (٠، ص) عندما س = ٠

∴ ٢ × ٠ - ٣ص - ٦ = ٠

- ٣ص = ٦ ∴ ص = $\frac{٦}{-٣}$ = -٢

∴ نقطة التقاطع مع محور الصادات ب (٠، -٢)

(٢) نفرض أن د منتصف $\overline{أب}$

د = $\left(\frac{٣+٠}{٢} ، \frac{٠-٢}{٢}\right)$ = $\left(\frac{٣}{٢} ، -١\right)$

∴ معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة $\left(\frac{٣}{٢} ، -١\right)$

هي س = $\frac{٣}{٢}$

تمرين (٣)

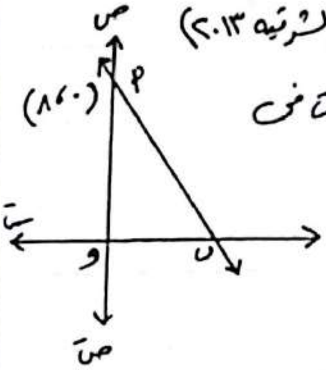
أوجد معادلة محور تماثل $\overline{سص}$ حيث س(٣، -٢)، ص(-٥، ٦)

الحل

ملحوظة محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودي عليها ماراً بمنتصفها

مثال (٤)

في الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٣)



$\overleftrightarrow{أب}$ يقطع محور الصادات في النقطة أ (٠، ٨)

ويقطع محور الصادات في النقطة ب

فإذا كان ظا (أ $\hat{ب}$ و) = $\frac{٤}{٣}$ فأوجد

(١) أولاً ق (ب $\hat{أ}$ و) ثانياً إحداثي ب

(٢) أولاً ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

ثانياً معادلة المستقيم المار بالنقطة و وعمودياً على $\overleftrightarrow{أب}$

الحل

(١) أولاً ∵ ظا (أ $\hat{ب}$ و) = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق (أ $\hat{ب}$ و) = ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ قياس (ب $\hat{أ}$ و) = ٩٠° - ٥٣° ٧َ ٤٨ً

= ٣٦° ٥٢َ ١٢ً

ثانياً نفرض أن النقطة ب (س، صفر)

، ∵ ظا (أ $\hat{ب}$ و) = $\frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{٨}{س} = \frac{٤}{٣}$ ∴ س = $\frac{٣ \times ٨}{٤}$ = ٦

∴ ب (٦، ٠)

(٢) أولاً: ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٨-٠}{-٦}$ = $\frac{-٨}{٦}$ = $\frac{-٤}{٣}$

ثانياً ∵ المستقيم المطلوب ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$

∴ ميل المطلوب = $\frac{٣}{٤}$

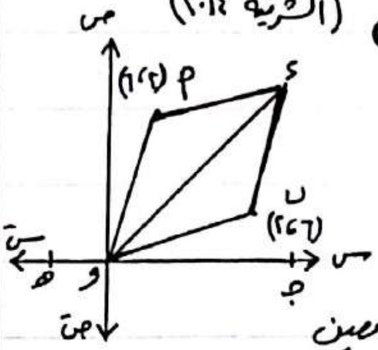
∴ معادلة المستقيم المطلوب ص = $\frac{٣}{٤}$ س + جـ

، ∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل و (٠، ٠)

∴ جـ = ٠ ∴ المعادلة هي ص = $\frac{٣}{٤}$ س

مثال (٥)

في الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٤)



النقط أ(٢، ٦)
، و(٠، ٠)
، ب(٦، ٢)
، د هي رؤوس معين
أوجد
١ إحداثي النقطة د
٢ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{و د}}$
٣ ق($\widehat{\text{د و هـ}}$)

الحل

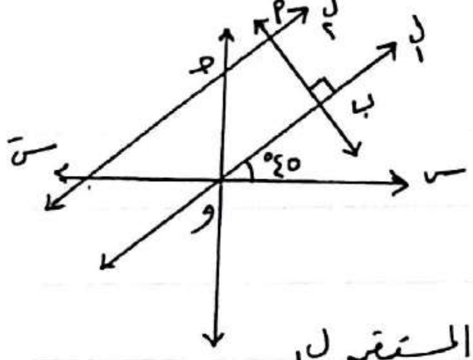
١ ∵ أ ب د و معين ∴ منتصف $\overline{\text{د و}}$
= منتصف $\overline{\text{ب أ}}$ = $\left(\frac{٦+٢}{٢} ، \frac{٢+٦}{٢}\right)$
= (٤، ٤)
∴ منتصف $\overline{\text{و د}}$ = (٤، ٤)
ونفرض أن د (س، ص) و(٠، ٠)
∴ $\left(\frac{س+٠}{٢} ، \frac{ص+٠}{٢}\right)$ = (٤، ٤)
∴ $\frac{س}{٢}$ = ٤ ∴ س = ٨
، $\frac{ص}{٢}$ = ٤ ∴ ص = ٨
∴ د (٨، ٨)

٢ ∵ $\overleftrightarrow{\text{و د}}$ يمر بنقطة الأصل ، (٨، ٨)
∴ المعادلة هي ص = م س
الميل (م) = $\frac{٨-٠}{٨-٠}$ = $\frac{٨}{٨}$ = ١
∴ ص = س

٣ ميل $\overleftrightarrow{\text{و د}}$ = ظا (هـ و د) = ١
∴ ق($\widehat{\text{هـ و د}}$) = ٤٥° ∴ ق($\widehat{\text{د و هـ}}$)
= ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

مثال (٦)

في الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٥)



ل١ // ل٢
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ ل١
أ (١، ٥)
أوجد
١ معادلة المستقيم ل١
٢ معادلة المستقيم ل٢
٣ طول $\overline{\text{أ ب}}$

الحل

١ ∵ ل١ يمر بنقطة الأصل ∴ معادلته ص = م س
∵ ميل المستقيم = ظا ٤٥° = ١
∴ معادلة المستقيم ل١ هي ص = س

٢ ∵ ل١ // ل٢
∴ م١ = م٢ = ١
∴ معادلة المستقيم ل٢ هي ص = م س + جـ
، ∵ ل٢ يمر بالنقطة أ (١، ٥)
∴ ٥ = ١ + جـ ∴ جـ = ٥ − ١ = ٤
∴ معادلة ل٢ هي ص = س + ٤

٣ نفرض أن ب (س، ص) ∵ $\boxed{ص = س}$
، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ ل١ ∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = −١
∴ $\frac{ص-٥}{س-١}$ = −١ ∴ ص − ٥ = −س + ١
، ∵ س = ص ∴ ص − ٥ = −ص + ١
∴ ٢ص = ١ + ٥ = ٦ ∴ ص = $\frac{٦}{٢}$ = ٣
∴ س = ٣ ∴ ب (٣، ٣)
طول $\overline{\text{أ ب}}$ = $\sqrt{(١-٣)^٢ + (٥-٣)^٢}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

الواجب

(١) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات .

(١) ص = ٣س + ١

(٢) ص = -٢س + ٣

(٣) ص = ٥س - ٢

(٤) $\frac{س}{٢}$ + ٣ص = ٦

(٥) ص + س - ١ = ٠

(٢) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات

(١) ميله = ٣ ، ٥ وحدات

(٢) ميله = -١ ويقطع ٣ وحدات

(٣) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله .. ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات

(١) ميله = -٢ ويقطع ٥ وحدات

(٢) ميله = ١ ويقطع ٣ وحدات

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم

(١) المار بنقطة الاصل ويصنع مع س+ ١٣٥°

(٢) المار بالنقطة (٠، ٢) ويصنع مع س+ ٤٥°

(٣) الموازى للمستقيم ٢س - ٣ص = ٦ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات

(٤) المار بالنقطة (٢، -١) وميله = ٢

(٥) المار بالنقطة (-٢، ٣) وعمودى على المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$ س - ٥

(٦) المار بالنقطة (٣، ٢) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (٥، ٦) ، (-١، ٢)

(٧) المار بالنقطتين (٢، -١) ، (١، ١)

(٨) المار بالنقطتين (٤، ٢) ، (-٢، -١) ثم اثبت أنه يمر بنقطة الاصل .

(٩) الذى يمر بمنتصف القطعة $\overline{أب}$ حيث أ(٣، ٦) ، ب(-١، ٤) وعمودياً على المستقيم الذى معادلته ٢ص = ٤س - ٥

(١٠) محور تماثل $\overline{أب}$ حيث أ(٤، ٨) ، ب(-٢، ٤)

(١١) يوازى المستقيم ٢ص = ٤س - ٥ ومنتصف القطعتين أ(٤، ٨) ، (٢، ٤)

(٥) أثبت أن المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٢، ٣) ، ب(-٢، ١) يوازى المستقيم الذى معادلته س - ٢ص + ٨ = ٠

(٦) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ(٢، ٣) ، ب(-٢، ١) عمودى على المستقيم الذى معادلته ٢س + ص + ٨ = ٠

(٧) إذا كان أس + ٢ص - ٣ = ٠ موازياً للمستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣) ، (١، ٥) فأوجد قيمة أ

(٨) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى السينات والصادات جزئين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ على الترتيب

(٩) أ ب جـ مثلث فيه أ(١، ٢) ، ب(٥، -٢) ، جـ(٣، ٤) ، د منتصف $\overline{أب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{ده}$ // $\overleftrightarrow{بجـ}$ ويقطع $\overleftrightarrow{أجـ}$ فى هـ

أوجد (١) طول $\overline{ده}$

(٢) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ده}$

١٠ أ ب جـ د مربع فيه أ = (٥، ٤) ، جـ (-١، ٦) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$

١١ أ ب جـ د معين ، م نقطة تقاطع قطريه حيث أ (١، ٣) ، جـ (٦، ٦). أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ب ، د

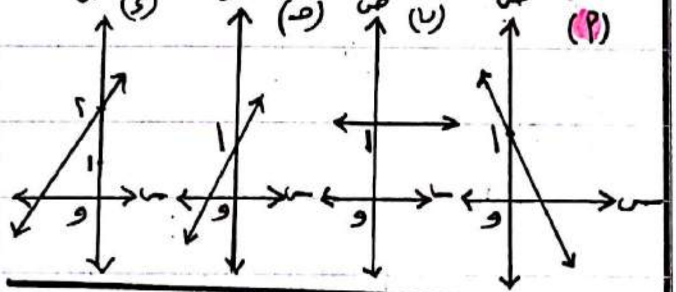
١٢ مستقيم معادلته
ص - ٢ س - ٣ = ٠ أوجد ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات وارسم هذا المستقيم .

١٣ الجدول التالى يمثل علاقة خطية

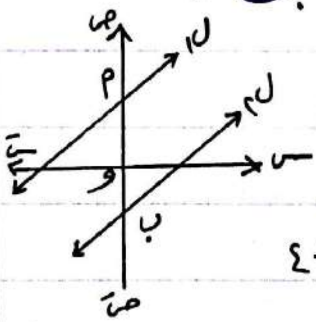
س	١	٢	٣
ص	١	٣	أ

(١) أوجد معادلة المستقيم
(٢) أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات
(٣) أوجد قيمة أ

١٤ اختر الشكل الممثل للمستقيم
ص = ٢ س + ١

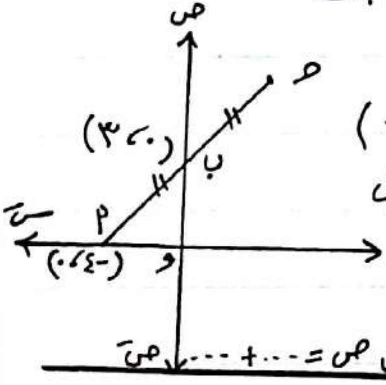


١٥ فى الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٢)



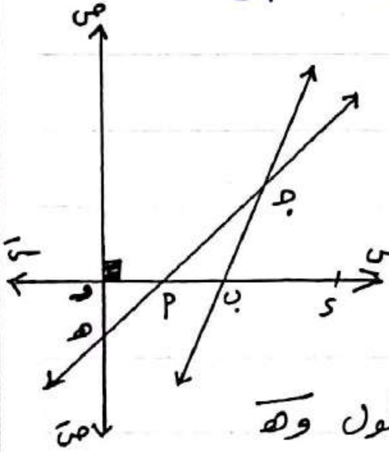
ل١ // ل٢
، أ ب = ٧ وحدات طول
ومعادلة ل١ هى
ص = ٢ س + ٤
فأوجد معادلة ل٢ ....

١٦ فى الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١١)



(١) نقطة جـ هى
(... ، ...)
(٢) فى Δ و أ ب يكون
ظا أ = ...
(٣) معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ هى ص = ... س + ...

١٧ فى الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٦)



ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٣/٢
،
معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ هى
س - ص = ٣
أوجد
(١) ميل $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، طول و هـ
(٢) ق ($\hat{\text{جـ ب د}}$) ، ق ($\hat{\text{جـ أ د}}$)
(٣) استنتج ق ($\hat{\text{أ جـ ب}}$)

انتهى المنهج مع أطيب
تمنياتى القلبية
بالنجاح والتفوق
أ/ محمد أدهم